Pour l'étude des fonctions, on s'appuiera conjointement sur les interprétations graphiques ($y = f(x)$) =, cinématiques ($x = f(t)$) =, et électriques (signaux relatifs à l'évolution d'une intensité, d'une différence de potentiel...). Comme en seconde, le programme se place dans le cadre des fonctions définies sur un intervalle. Dans certains exemples, l'ensemble de définition est une réunion d'intervalles ; on se ramène alors à une étude portant sur chacun de ces intervalles. L'intervalle de définition sera indiqué. Toute recherche a priori d'ensembles de définition est exclue.

PROGRAMMES	COMMENTAIRES
Les premiers éléments de l'étude d'une fonction (parité, maximums, minimums, monotonie) ont été mis en place en seconde. Les activités sur les fonctions conduisent à introduire les notations $f = g$, λf, $f + g$, fg, $g \circ f$, $f \geq 0$, $f \geq g$, et à définir la restriction d'une fonction à un intervalle.	Il n'y a pas lieu d'effectuer un exposé général sur les fonctions (statut mathématique du concept de fonction, notion d'ensemble de définition, opérations algébriques, composition, relation d'ordre). Il faut s'assurer que les élèves connaissent les propriétés et la représentation graphique des fonctions usuelles telles que celles qui à x font correspondre : $ax + b$, x^2, $\frac{1}{x}$, $\sqrt{x}$. (La fonction cube sera introduite à titre d'exemple et pourra devenir une nouvelle fonction usuelle). Les élèves doivent connaître et savoir utiliser les règles donnant le sens de variation d'une fonction composée de deux fonctions monotones.
Travaux pratiques : Programmation des valeurs d'une fonction d'une variable. Exemples simples d'obtention de la représentation graphique de fonctions telles que $f + \lambda$, $f(x + \lambda)$, $f(\lambda x)$, $\|f\|$ à partir de celle de la fonction f. Exemples de lecture de propriétés d'une fonction à partir de sa représentation graphique. Exemples d'études d'équations $f(x) = \lambda$ ou d'inéquations $f(x) \leq \lambda$.	Cette étude ne concerne que les spécialités « génie électronique » et « génie électrotechnique » où elle sera interprétée en termes de signaux $t \longmapsto f(t)$, en liaison avec l'enseignement de l'électronique. Tout exposé général est exclu ; c'est à travers l'étude de quelques exemples (paraboles, hyperboles, sinusoïdes...) que les idées pourront être mises en place. L'exploitation d'une donnée graphique a un double intérêt : contrôler des résultats ; suggérer des propriétés, que l'on peut alors justifier si l'on dispose d'une étude de la fonction.

I. NOTION DE FONCTION

a. Définition

Soit D un ensemble de nombre.

On appelle **fonction** f sur l'ensemble D le *mécanisme mathématique* qui permet d'associer à tout nombre x de D en un réel unique noté f(x). On note f : $x \longmapsto$ f(x).

b. Vocabulaire

- f(x) est l'**image** de x ;
- x est l'**antécédent** de f(x) ;
- D est l'**ensemble de définition** (ou domaine de définition) de f.

Exemple : Sur l'intervalle [-2 ; 2], on définit la fonction f par : $x \longmapsto f(x) = (x - 1)^2 - 3$

f(-2) = (-2 – 1)² – 3 = (-3)² + 3 = 9 – 3 = 6 : L'image de -2 par la fonction f est 6.
f(-1) = (-1 – 1)² – 3 = (-2)² + 3 = 4 – 3 = 1 : L'image de -1 par la fonction f est 1.
f(0) = (0 – 1)² – 3 = (-1)² – 3 = 1 – 3 = -2 : L'image de 0 par la fonction f est -2.
f(1) = (1 – 1)² – 3 = 0 – 3 = -3 : L'image de 1 par la fonction f est -3.
f(2) = (2 – 1)² – 3 = 1² – 3 = 1 – 3 = -2 : L'image de 2 par la fonction f est -2.

On peut dresser un tableau des valeurs :

x	-2	-1	0	1	2
f(x)	6	1	-2	-3	-2

Remarque :

- chaque nombre de l'ensemble de définition a une image et une seule.
- certaines images peuvent avoir plusieurs antécédents.
- si un nombre n'a pas d'image, c'est qu'il n'appartient pas à l'ensemble de définition de la fonction.

c. Sens de variation

Soif f une fonction définie sur un intervalle I.

f est **croissante** sur I quand, pour tous réels a et b de I, f(a) et f(b) sont **dans le même ordre** que a et b.
f est **décroissante** sur I quand, pour tous réels a et b, f(a) et f(b) sont **dans l'ordre inverse** de a et b.

II. REPRESENTATION GRAPHIQUE D'UNE FONCTION

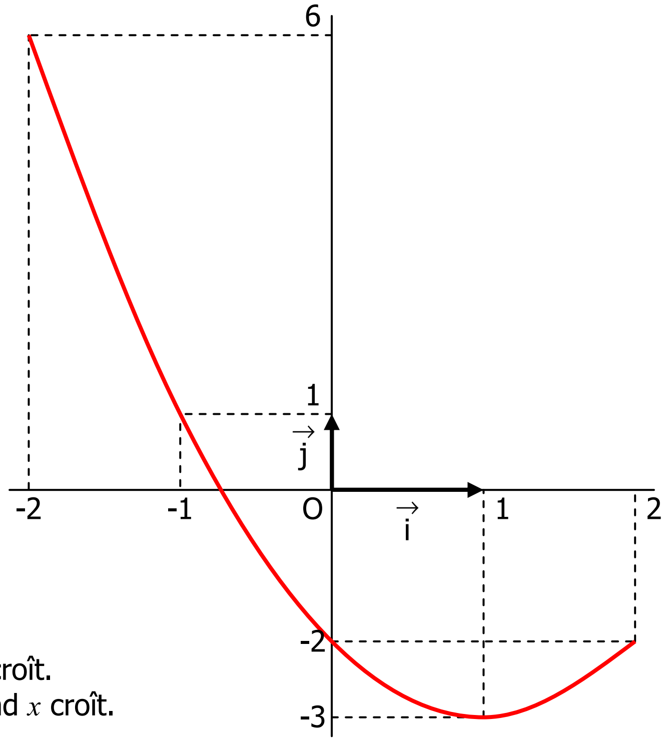
On considère le repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$). On appelle **représentation graphique de la fonction** f l'ensemble des points de coordonnées (x ; f(x)) où x appartient à l'ensemble de définition D.

Exemple :

On va représenter sur l'intervalle [-2 ; 2] la fonction définie par f : $x \longmapsto (x-1)^2 - 3$

On va utiliser le un tableau des valeurs :

Abscisses	x	-2	-1	0	1	2
Ordonnées	f(x)	6	1	-2	-3	-2



Remarque :

Puisque chaque nombre de l'ensemble de définition a une image et une seule, alors toute droite « verticale » a un point d'intersection et un seul avec la courbe de la fonction.

On parle de la « courbe d'équation $y = (x-1)^2 - 3$ »

Interprétation graphique du sens de variation :

f est **croissante** sur I si sa courbe « **monte** » quand x croît.

f est **décroissante** sur I si sa courbe « **descend** » quand x croît.

III. FONCTIONS AFFINES

On appelle **fonction affine** toute fonction de la forme $f : x \longmapsto ax + b$ où a (taux d'accroissement) et b (valeur pour $x = 0$) sont des réels fixés.

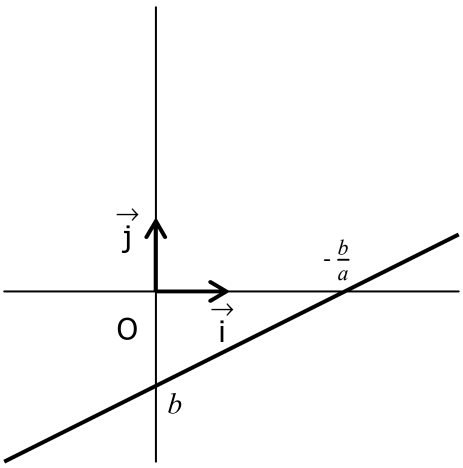
Exemple :

La fonction f définie sur ℝ par $f : x \longmapsto 3x - 2$ est affine.

Le sens de variation d'une fonction affine ne dépend que du nombre a.

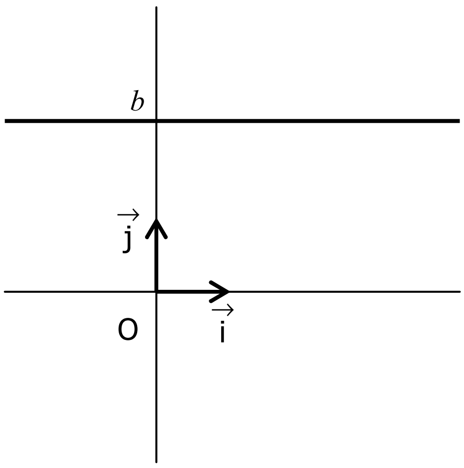
Si a > 0

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
f		0	



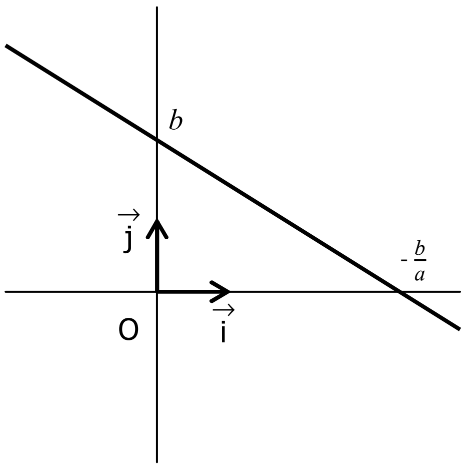
Si a = 0

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
f	La fonction est constant, le tableau n'a aucun interêt		



Si a < 0

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
f		0	



IV. AUTRES FONCTIONS DE REFERENCE

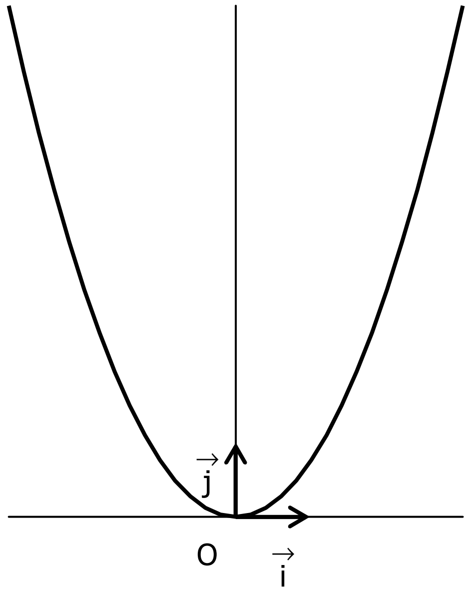
a. Fonction carré

On appelle **fonction carré** la fonction $f : x \longmapsto x^2$ définie sur $\mathbb{R}$

Pour tout x, $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$: On dit alors que cette fonction est **paire**, ce qui signifie qu'un nombre et son opposé ont toujours la même image.

Graphiquement, cela signifie que pour toute valeur de x, les points de la courbe M(x ; $f(x)$) et M'($-x$; $f(-x)$) ont la même ordonnée, et sont donc symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		$\searrow$	0	$\nearrow$	



Cette courbe s'appelle une **parabole**

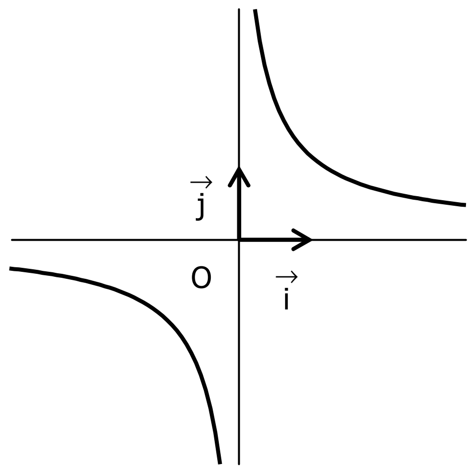
b. Fonction inverse

On appelle **fonction inverse** la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ définie sur $]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$.

Pour tout x, $f(-x) = \dfrac{1}{-x} = -\dfrac{1}{x} = -f(x)$: on dit alors que cette fonction est **impaire**, ce qui signifie qu'un nombre et son opposé ont des images opposées.

Graphiquement, cela signifie que pour toute valeur de x, les points de la courbe M(x ; $f(x)$) et M'($-x$; $f(-x)$) ont une ordonnée opposée, et sont donc symétriques par rapport à l'origine.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		$\searrow$	$\|\|$	$\searrow$	

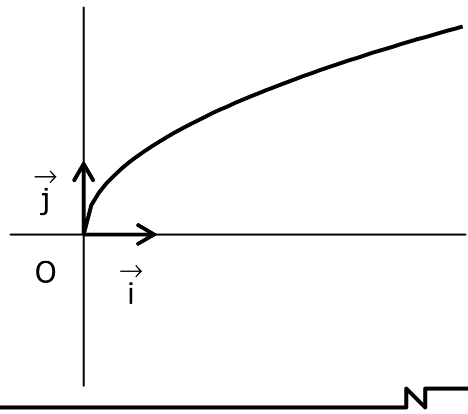


Cette courbe s'appelle une **hyperbole**

c. Fonction racine carrée

On appelle **fonction racine carrée** la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x}$ définie sur $[0 ; +\infty[$.

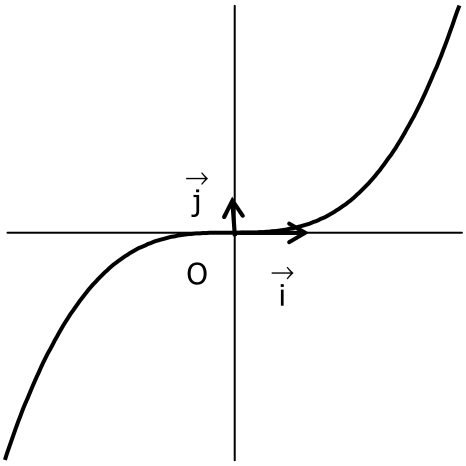
x	0		$+\infty$
f	0	$\nearrow$	



d. Fonction cube

On appelle **fonction cube** la fonction $f : x \longmapsto x^3$ définie sur $\mathbb{R}$.
Pour tout x, $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$: cette fonction est **impaire**

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f		0 ↗	



V. OPERATIONS SUR LES FONCTIONS

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I, et λ un nombre réel.
→ On note $f + g$ la fonction définie sur I par $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
→ On note fg la fonction définie sur I par $(fg)(x) = f(x) \times g(x)$
→ On note f^2 la fonction définie sur I par $(f^2)(x) = \big(f(x)\big)^2$
→ On note λf la fonction définie sur I par $(\lambda f)(x) = \lambda \times f(x)$

Exemples :

Soit f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et $g(x) = x + 5$
→ La fonction $f + g$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $(f + g)(x) = x^2 + x + 5$
→ La fonction $f g$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $(fg)(x) = x^2 \times (x + 5) = x^3 + 5x^2$
→ La fonction f^2 est définie sur $\mathbb{R}$ par $(f^2)(x) = (x^2)^2 = x^4$
→ La fonction $3f$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $(3f)(x) = 3x^2$

VI. COMPOSITION DE FONCTIONS

Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$.
On appelle composée de f par g, notée $g \circ f$ (« g rond f ») la fonction définie par $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$

Exemples :

Soit f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et $g(x) = x + 5$, alors $(g \circ f)(x) = x^2 + 5$ et $(f \circ g)(x) = (x + 5)^2$

Théorème :

La composée de deux fonctions croissantes est croissante.
La composée de deux fonctions décroissantes est croissante.
La composée d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante est décroissante.

Exemples :

Soit la fonction $f : x \longmapsto (2x - 1)^3$

C'est la composée de deux fonctions :

$f_1 : x \longmapsto 2x - 1 = X$ croissante sur $\mathbb{R}$

puis $f_2 : X \longmapsto X^3$ croissante sur $\mathbb{R}$

Donc f est croissante sur $\mathbb{R}$.