PROGRAMMES	COMMENTAIRES
Fonctions polynômes : Si une fonction polynôme est nulle, tous ses coefficients sont nuls (résultat admis).	Les fonctions polynômes sont plus simplement appelées polynômes ; la notion de polynôme en tant qu'objet formel est hors programme.
Factorisation par $(x - a)$ d'un polynôme s'annulant en un point a.	Pour les factorisations, les élèves peuvent procéder par identification ; ils peuvent aussi employer d'autres méthodes, mais aucune connaissance spécifique sur de telles méthodes n'est exigible.
Travaux pratiques : Calculs sur les polynômes d'une variable (développements, factorisations).	Pour les factorisations, on se limitera à des polynômes de faible degré; si le degré excède deux, des indications sur la méthode à suivre doivent être fournies.
Exemples de mise en oeuvre de méthodes pour résoudre des systèmes d'équations linéaires à coefficients numériques (méthode de Gauss, combinaisons linéaires). (application à l'identification)	Il convient de se limiter à des systèmes de taille très modeste. La méthode du pivot de Gauss est à pratiquer sur des exemples, mais sa description générale n'est pas au programme.

I. FONCTION POLYNOME

On appelle **fonction polynôme** (ou « polynôme » tout court) tout fonction dont l'expression **peut s'écrire** sous la forme « $a_0 + a_1x + \dots a_nx^n$ » où x est la variable et a_0, a_1… a_n ($a_n \neq 0$) sont des coefficients réels.

n est le **degré** du polynôme.

a_0 est le **terme constant**.

Exemples :

$P(x) = 3x^2 - 7x + 8$ est un polynôme (développé) de degré 2, le terme constant est 8.

$Q(x) = (3x - 7)(2x + 1)(5x - 2)$ est un polynôme (factorisé) de degré 3, le terme constant est 14.

II. FACTORISATION D'UN POLYNOME

a. Egalité de deux polynômes

On dit que deux polynômes P et Q sont égaux si et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $P(x) = Q(x)$

Exemple :

Soit $\mathbf{P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 30x + 25}$ et $\mathbf{Q(x) = (x + 5)(2x^2 - 7x + 5)}$

A l'aide de la machine, calculons $P(x)$ et $Q(x)$ pour un certain nombre de valeurs de x :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$P(x)$	**88**	**81**	**56**	**25**	**0**	**-7**	**16**
$Q(x)$	**88**	**81**	**56**	**25**	**0**	**-7**	**16**

Il semble donc bien que $P(x)$ et $Q(x)$ soient égaux. Et en effet, en développant $Q(x)$, on retrouve $P(x)$ (voir **EXERCICE 1A.2**)

b. Théorème d'identification

Deux polynômes sont égaux si et seulement si leurs termes de même degré sont égaux.

Exemple :

On veut montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$ on a : $2x^3 - 11x^2 + 18x - 9 = (x - 3)(ax^2 + bx + c)$ où a, b et c sont des coefficients à déterminer.

→ On développe $(x - 3)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx - 3ax^2 - 3bx - 3c$

→ On réduit : $= ax^3 + (b - 3a)x^2 + (c - 3b)x - 3c$

→ On **identifie** avec les termes du polynôme : $2x^3 - 11x^2 + 18x - 9$

$$\text{d'où : } \begin{cases} a = 2 \\ b - 3a = -11 \\ c - 3b = 18 \\ -3c = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -11 + 3 \times 2 \\ 3 - 18 = 3b \\ c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -5 \\ \cancel{3 - 18 = 3b} \\ c = 3 \end{cases}$$

Donc $\boxed{2x^3 - 11x^2 + 18x - 9 = (x-3)(2x^2 - 5x + 3)}$

c. Racine (zéro) d'un polynôme

On dit que a est une **racine** (ou un **zéro**) du polynôme P si et seulement si $P(a) = 0$

Exemple :

Soit $P(x) = 2x^3 - 11x^2 + 18x - 9$

Montrons que 3 est une racine de P :

$$\begin{aligned} P(3) &= 2 \times 3^3 - 11 \times 3^2 + 18 \times 3 - 9 \\ &= 2 \times 27 - 11 \times 9 + 18 \times 3 - 9 \\ &= 54 - 99 + 54 - 9 \\ &= 108 - 108 \\ &= 0 \end{aligned}$$

3 est bien une racine de P.

Remarque :

Les nombres suivants : -2 ; -1 ; 0 ; 1 et 2 lorsqu'ils sont racine d'un polynôme, sont appelées **racines évidentes**.

d. Factorisation d'un polynôme

Théorème :

Si a est une racine d'un polynôme P de degré n, alors il existe un polynome Q de degré $(n-1)$ tel que :

$$P(x) = (x-a)Q(x)$$

On dit alors qu'on a *factorisé* P par $(x-a)$

Exemple :

→ dans le **c.** on a montré que 3 est une racine de $P(x) = 2x^3 - 11x^2 + 18x - 9$

→ dans le **b.** on a montré que $P(x)$ peut s'écrire $(x-3)\underbrace{(2x^2 - 5x + 3)}_{Q(x)}$