PROGRAMMES	COMMENTAIRES
Forme canonique, discriminant ; application à la résolution de l'équation et à l'étude de la fonction (symétrie, variations, signe). Somme et produit des racines).	Il convient d'éviter le recours aux formules générales de résolution lorsque la factorisation est immédiate.
Résolution numérique et étude graphique de systèmes d'équations ou inéquations linéaires à deux inconnues à coefficients numériques.	

I. POLYNOME DU SECOND DEGRE

a. Définition

On appelle **polynôme du second degré** toute expression de la forme $ax^2 + bx + c$ avec a, b et c sont des nombres réels, et $a \neq 0$.

Exemples : $A(x) = x^2 + 8x - 9$ et $B(x) = -x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{3}{7}$ sont des polynôme du second degré.

b. Différentes formes d'un polynôme

Le polynôme $A(x)$ peut s'écrire sous plusieurs formes :
- Forme développée : $A(x) = x^2 + 8x - 9$
- Forme factorisée : $A(x) = (x - 1)(x + 9)$
- Forme **canonique** : $A(x) = (x + 4)^2 - 25$

On appelle forme canonique d'un polynôme du second degré $P(x)$ toute écriture où la variable x n'apparaît qu'une seule fois.

Exemple :

On veut mettre sous forme canonique $A(x) = x^2 + 8x - 9$.

$A(x) = x^2 + 8x - 9$

$A(x) = x^2 + 2 \times 4 \times x - 9$ (1) On fait apparaître une expression du type « a² ± 2ab… »

$A(x) = x^2 + 2 \times 4 \times x + 4^2 - 4^2 - 9$ (2) On rajoute/enlève un « + b² » pour pouvoir factoriser.

$A(x) = x^2 + 2\times 4x + 4^2 - 16 - 9$ (3) On reconnaît une identité remarquable que l'on va factoriser.

$\boxed{A(x) = (x + 4)^2 - 25}$ (4) On obtient $A(x)$ sous forme canonique.

Cas général : Mise sous forme canonique d'un polynôme P.

$P(x) = ax^2 + bx + c$

$\Leftrightarrow P(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$ On met « a » en facteur pour que le coefficient de x soit 1.

$\Leftrightarrow P(x) = a\left(x^2 + 2 \times \frac{b}{2a} \times x + \frac{c}{2a}\right)$ (1)

$\Leftrightarrow P(x) = a\left[x^2 + 2 \times \frac{b}{2a} \times x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{2a}\right]$ (2)(3)

$\Leftrightarrow P(x) = a\left[\left(x^2 + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{2a}\right]$ On va mettre au dénominateur le terme constant.

$\Leftrightarrow P(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2}\right]$

$\Leftrightarrow P(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$ (4)

Propriété :

La forme canonique d'un polynôme $\mathbf{P(x) = ax^2 + bx + c}$ est $\boxed{P(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]}$

II. FACTORISATION D'UN POLYNOME DU SECOND DEGRE

a. Polynôme du type ax^2 + bx

Le polynôme $P(x) = ax^2 + bx$ se factorise de façon évidente sous la forme $P(x) = x(ax + b)$

Exemple : $A(x) = 3x^2 + 5x = x(3x + 5)$

b. Polynôme du type ax^2 + c

$P(x) = ax^2 + c = a\left(x^2 + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 - \frac{-c}{a}\right)$

1^er^ cas : Si $\frac{-c}{a} > 0$, alors il admet une racine carrée et on peut écrire :

$P(x) = a\left[x^2 - \left(\sqrt{\frac{-c}{a}}\right)^2\right]$ (différence de deux carrés) et donc $P(x) = a\left(x + \sqrt{\frac{-c}{a}}\right)\left(x - \sqrt{\frac{-c}{a}}\right)$

Exemple :

$A(x) = 4x^2 - 9 = 4\left(x^2 - \frac{9}{4}\right) = 4\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right)$

2^nd^ cas : Si $\frac{-c}{a} < 0$, alors on ne peut pas factoriser ce polynôme.

Exemple :

$B(x) = x^2 + 4$ n'est pas factorisable.

c. Cas général : P(x) = ax^2 + bx + c

On a vu précédemment qu'on peut écrire $P(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$

Ce qui se ramène au cas b. et on va essayer d'écrire $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ comme la différence de deux carrés. Pour alléger les écritures, on poser **$\Delta = b^2 - 4ac$**, qu'on appelle le **discriminant**.

Donc $P(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$

1^er^ cas : Si $\Delta > 0$, alors il admet une racine carrée et on peut écrire :

$P(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\sqrt{\Delta}^2}{(2a)^2}\right]$

$\Leftrightarrow$ $P(x) = a\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$

$\Leftrightarrow$ $P(x) = a\left(x + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)$

2^ème^ cas : Si $\Delta = 0$, alors on peut écrire :

$P(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$

3^ème^ cas : Si $\Delta < 0$, alors on ne peut pas factoriser P.

III. EQUATION DU SECOND DEGRE

a. Solutions d'une équation du second degré.

Théorème :

Soit l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ où a, b et c sont réels et $a \neq 0$
On note Δ le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta > 0$, l'équation a deux solutions $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$
- Si $\Delta = 0$, l'équation a une seule solution « double » $x_0 = \frac{-b}{2a}$
- Si $\Delta < 0$, l'équation n'admet aucune solution réelle

Conséquence :

On considère le polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c$.

- Si $\Delta > 0$, P se factorise sous la forme : $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$
  → deux racines distinctes.
- Si $\Delta = 0$, P se factorise sous la forme : $P(x) = a(x - x_0)^2$
  → une racine double ou deux racines confondues.
- Si $\Delta < 0$, P ne se factorise pas dans $\mathbb{R}$

Exemple :

On considère le polynôme $P(x) = 2x^2 - 3x - 9$, qu'on souhaite factoriser.

→ On résout l'équation $2x^2 - 3x - 9 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times (-9) = 9 + 72 = 81$ donc $\sqrt{\Delta} = 9$

donc $P(x) = 0$ admet deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{3 + 9}{2 \times 2} \qquad x_2 = \frac{3 - 9}{2 \times 2}$$

$$x_1 = \frac{12}{4} \qquad x_2 = \frac{-6}{4}$$

$$x_1 = 3 \qquad x_2 = \frac{-3}{2}$$

P peut donc s'écrire $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ donc $\boxed{P(x) = 2(x - 3)\left(x + \frac{3}{2}\right)}$

b. Somme et produit des racines.

Théorème :

On considère le polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c$.

Si P admet deux racines (distinctes ou confondues) alors :

→ la **somme** de ces racines est égale à $\frac{-b}{a}$

→ le **produit** de ces racines est égale à $\frac{c}{a}$

Remarque :

Si a = 1, un polynôme du second degré est toujours sous la forme :

$$\boxed{x^2 - Sx + P}$$

où **S** et **P** sont respectivement la **Somme** et le **Produit** des racines.

Exemple :

Le polynôme $P(x) = 2x^2 - 3x - 9$ admet pour racines $x_1 = \frac{3}{2}$ et $x_2 = -3$.

Somme : $\frac{-b}{a} = \frac{-(-3)}{2} = \frac{3}{2}$ et $x_1 + x_2 = 3 - \frac{3}{2} = \frac{6}{2} - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$

Produit : $\frac{c}{a} = \frac{-9}{2}$ et $x_1 \times x_2 = 3 \times \frac{-3}{2} = \frac{-9}{2}$

IV. SIGNE D'UN POLYNOME DU SECOND DEGRE

Rappel :

Le signe d'un produit est déterminé par le nombre de facteurs négatifs.

- Si ce nombre est pair, alors le produit est positif.
- Si ce nombre est impair, alors le produit est négatif.

Théorème

On considère le polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c$.

Si $\Delta < 0$, $P(x)$ est toujours du signe de a

Si $\Delta = 0$, alors $P(x) = a(x - x_0)^2$ est $\begin{cases} \text{du signe de a quand } x \neq x_0 \\ = 0 \text{ quand } x = x_0 \end{cases}$

Si $\Delta > 0$, alors $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ et son signe est défini par l'un des tableaux de signe suivants (où l'on suppose que $x_1 < x_2$) :

Si a > 0

x		x_1		x_2	
$x - x_1$	−	0	+	0	+
$x - x_2$	−		−		+
a	**+**		**+**		**+**
$a(x - x_1)(x - x_2)$	+	0	−	0	+

Si a < 0

x		x_1		x_2	
$x - x_1$	−	0	+		+
$x - x_2$	−		−	0	+
a	**−**		**−**		**−**
$a(x - x_1)(x - x_2)$	−	0	+	0	−

Plus simplement, un polynôme est :
- du **signe de (-a)** entre ses deux racines
- du **signe de (a)** ailleurs

Exemple :

Le polynôme $P(x) = 2x^2 - 3x - 9$ e factorise en $P(x) = 2(x - 3)\left(x + \frac{3}{2}\right)$ avec $a = 2 > 0$

Donc : $P(x) > 0$ sur $\left]-\infty \,;\, \frac{-3}{2}\right[\cup \left]3 \,;\, +\infty\right[$

$P(x) = 0$ si $x = \frac{-3}{2}$ ou $x = 3$

$P(x) < 0$ sur $\left]\frac{-3}{2} \,;\, 3\right[$

V. REPRESENTATION GRAPHIQUE

On considère le polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ et sa forme canonique : $a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$

Si $\Delta < 0$
→ $P(x)$ est toujours du signe de a

$\Delta = 0$
→ $P(x) = a(x - x_0)^2$

Si $\Delta > 0$
→ $P(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$