La dérivation constitue *l'objectif essentiel du programme d'analyse* de première ; cet objectif est double :
- Acquérir une bonne idée des *différents aspects de la dérivation en un point* ;
- Exploiter les énoncés du programme concernant les *fonctions dérivées* pour l'étude des fonctions ;

Il est important que les élèves puissent *pratiquer* la dérivation pendant une durée suffisante ; il convient donc d'aborder ce chapitre assez tôt dans l'année.

Le programme comporte aussi une approche de la notion de limite en 0 d'une fonction : il s'agit de permettre aux élèves d'acquérir une *première idée* de cette notion et de fournir un langage commode pour introduire la *dérivée.* Il n'y a pas lieu de s'attarder sur la notion de limite ; la définition de limite par (ε ; α) et la notion de continuité sont hors programme, de même que *tout exercice de recherche de limite*.

PROGRAMMES	COMMENTAIRES
Limite en 0 d'une fonction : Limite en 0 des fonctions $h \longmapsto h$, $h \longmapsto h^2$, $h \longmapsto h^3$, $h \longmapsto \sqrt{h}$.. Introduction de la notation $\lim\limits_{h \to 0} f(h)$ dans le cas d'une limite finie. Dans ce cas, dire que $\lim\limits_{h \to 0} f(h) = L$ signifie aussi que $\lim\limits_{h \to 0} \lvert f(h) - L\rvert = 0$ ou encore que $f(h) = L + \varphi(h)$ où $\lim\limits_{h \to 0} \varphi(h) = 0$.	Pour cette introduction, on s'appuiera sur des expérimentations numériques et graphiques portant sur les fonctions de référence ci-contre. Pour donner une idée du cas général on peut dire, par exemple, pour le cas où $\lim\limits_{h \to 0} f(h) = 0$, que $\lvert f(h)\rvert < 10^{-1}, 10^{-2}, \dots 10^{-9}, \dots 10^{-p}$, dès que *h* est assez petit.
Dérivation en un point : Approximation par une fonction affine, au voisinage de 0, des fonctions que à h associent $(1 + h)^2$, $(1 + h)^3$, $\frac{1}{1+h}$, $\sqrt{1+h}$; aspect géométrique.	Il convient de combiner l'expérimentation (graphique et numérique) et le raisonnement ; on mettra en valeur sur quelques exemples l'influence de la taille de l'intervalle sur la qualité de l'approximation. On montrera aussi que cette étude permet d'approcher, par exemple, $x \longmapsto x^2$ au voisinage de 2. Sur les exemples étudiés, on n'hésitera pas à indiquer que des expressions telles que $3h + h^2$, $\frac{h}{1+h}$ tendent vers 0 lorsque h tend vers 0 ; il est inutile de formuler des énoncés sur les limites relatifs à la comparaison et aux opérations sur les limites.
Lorsque, au voisinage de 0, f(a + h) peut s'écrire sous la forme $f(a + h) = f(a) + Ah + h\varphi(h)$ avec $\lim\limits_{h \to 0} \varphi(h) = 0$, on dit que la fonction *f* admet *A* pour nombre dérivé au point a ; Aspect géométrique : tangente. Aspect mécanique : vitesse. Limite en zéro du taux de variation $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.	Le texte ci-contre suggère une démarche pour l'introduction du nombre dérivé ; le professeur peut adopter un autre choix. Quel que soit ce choix, il convient de mettre en valeur, *à travers l'étude de quelques exemples simples*, les différents aspects de cette notion mentionnés dans ce texte. On prendra notamment des exemples issus de la mesure de grandeurs géométriques et physiques (aire, volume, puissance, intensité...) ou de la vie économique et sociale (populations, prix...). L'étude de points singuliers, tels que $x \longmapsto \lvert x\rvert$ en 0 ou $x \longmapsto \sqrt{x}$ en 0, est hors programme.
Equation cartésienne de la tangente au point d'abscisse a.	On observera que, pour construire la tangente, il suffit de connaître son coefficient directeur, c'est-à-dire $f'(a)$; le recours à l'équation cartésienne est inutile.
Dérivation sur un intervalle. Fonction dérivée : Dérivée d'une somme, d'un produit par une constante, d'un produit, d'un inverse, d'un quotient. Dérivée de $x \longmapsto x^n$ (n entier relatif) et de $x \longmapsto \sqrt{x}$. Dérivée de $t \longmapsto f(at + b)$.	Les élèves doivent connaître les règles de dérivation et savoir les appliquer à des exemples ne présentant aucune complication technique, tels que $x + \frac{1}{x}$ ou $\frac{x}{x^2+1}$, ou encore $x(x - 1)^2$. Pour les fonctions composées $t \longmapsto f(u(t))$, le programme se limite au cas où $u(t) = at + b$. Les démonstrations de ces règles ne sont pas au programme. La notation différentielle peut être donnée en liaison avec les autres matières, mais aucune connaissance à ce sujet n'est exigible en mathématiques. En liaison avec l'enseignement des autres disciplines, on habituera les élèves à lire le tableau des dérivées dans les deux sens, en employant le langage des primitives, mais aucune connaissance à ce sujet n'est exigible en mathématiques.
Application à l'étude du comportement local et global des fonctions (résultats admis) Si f est dérivable sur I et admet un maximum local (ou un minimum local) en un point a distinct des extrémités de I, alors f'(a)=0 Si f est dérivable sur l'intervalle I et si la dérivée f ' est nulle sur I, alors f est constante sur I. Si f est dérivable sur I, et si f ' est positive sur I, alors f est croissante sur I. Si f est dérivable sur [a;b], où a<b, et si f ' est à valeurs strictement positives sur [a;b], alors f est strictement croissante sur [a;b] et, pour tout élément λ de [f(a);f(b)] l'équation f(a)=λ admet une solution et une seule dans [a;b]. Énoncés analogues pour les fonctions décroissantes.	On mettra en valeur les interprétations graphiques et cinématiques des énoncés de ce paragraphe. On pourra mettre en évidence l'utilité des hypothèses à l'aide de quelques contre-exemples très simples illustrés par des graphiques. On observera d'abord que, si f est croissante sur I, alors f 'est positive sur I.

I. LIMITE EN 0 D'UNE FONCTION :

a. Valeur absolue

Soit x un réel. On note $|x|$ la « distance de x à 0 » (qui est donc toujours positive).
Soit x et y deux réels. On note $|x-y|$ la « distance entre x à y » (qui est donc toujours positive).

Exemples :

|3| = « distance de 3 à 0 » = 3
|5 – 3| = « distance de 5 à 3 » = 2
|-5| = « distance de -5 à 0 » = 5
|5 + 3| = |5 – (-3)| = « distance de 5 à (-3) » = 8

b. Exemple d'étude d'une fonction au voisinage de 0

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$. (x est exprimé en radians)

Cette fonction **n'existe pas** quand $x = 0$. On va donc étudier le comportement f quand x s'approche de 0.

x	-1	-0,5	-0,1	-0,01	0	0,01	0,1	0,5	1
$f(x)$	0,8414	0,9586	0,9983	0,9999	**n'existe pas**	0,9999	0,9983	0,9586	0,8414
$\|f(x)-1\|$	0,1586	0,0414	0,0017	0,0001	**n'existe pas**	0,0001	0,0017	0,0414	0,1586

On constate que plus x est proche de 0, plus $f(x)$ est proche de 1 (c'est-à-dire que $|f(x)-1|$ est inférieur à 10^{-1}, 10^{-2}… 10^{-p}…)

On dit que **la limite de $f(x)$ en 0 est 1** et on note $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$

c. Limites en 0 des fonctions de référence

En étudiant de la même façon les fonctions de référence, on obtient les résultats suivants :

$\boxed{\lim\limits_{x \to 0} x = 0}$ $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0}$ $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} x^3 = 0}$ $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x} = 0}$

d. Cas général

Soit I un intervalle contenant 0, ou dont 0 est une borne.

→ Si lorsque x est proche de 0, $|f(x)|$ est inférieur à 10^{-1}, 10^{-2}… 10^{-p}… ,
Alors on dit que **la limite de f(x) quand x tend vers 0 est 0**,
Et on note : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

→ Si lorsque x est proche de 0, $|f(x) - L|$ est inférieur à 10^{-1}, 10^{-2}, … 10^{-p}… ,
Alors on dit que **la limite de f(x) quand x tend vers 0 est L**, et on note : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = L$

II. FONCTION AFFINE (RAPPEL)

Toute fonction affine peut s'écrire sous la forme $f(x) = ax + b$ avec :

→ **a =** $\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}$: **taux d'accroissement**, c'est-à-dire le coefficient de proportionnalité entre l'accroissement de x et celui de f(x). Il correspond à au coefficient directeur (la pente) de la droite qui représente la fonction.

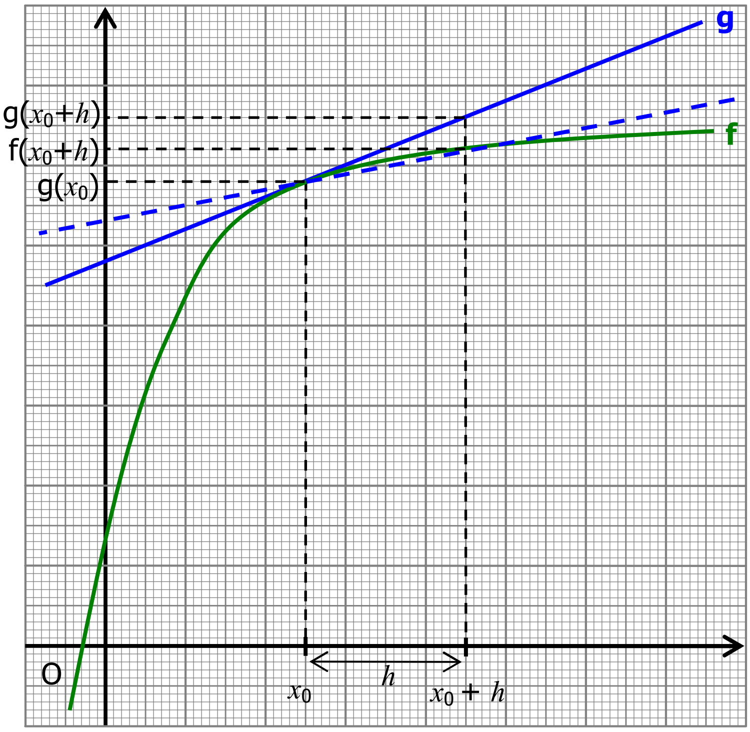
Exemple :

Si $f(x) = 3x + 5$, le taux d'accroissement est 3.
Cela signifie « quand x s'accroît de 1 unité, f(x) accroît de 3 unités ».

III. DERIVATION EN UN POINT

a. Approximation d'une fonction quelconque par une fonction affine

On considère une fonction quelconque f.
On souhaite déterminer une fonction affine g telles que, pour une certaine valeur x_0, on ait f(x_0) = g(x_0), et qu'au voisinage de cette valeur, f et g soient de plus en plus proches.



Le taux d'accroissement de g est :

$$a = \frac{\Delta g(x)}{\Delta x}$$

$$a = \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{x_0 + h - x_0}$$

$$\boxed{a = \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h}}$$

Or, au voisinage de x_0, f et g sont très proches, ce qui signifie que :

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = a + \varphi(h) \text{ avec } \lim_{h \to 0} \varphi(h) = 0$$

Ou bien que :

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = h[a + \varphi(h)] \text{ avec } \lim_{h \to 0} \varphi(h) = 0$$

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h[a + \varphi(h)] \text{ avec } \lim_{h \to 0} \varphi(h) = 0$$

$$\boxed{f(x_0 + h) = f(x_0) + ah + h\varphi(h)} \text{ avec } \lim_{h \to 0} \varphi(h) = 0$$

b. Fonction dérivable en un point

Définition :
Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant x_0
On dit que f est **dérivable** en x_0 si et seulement si il existe un nombre a et un fonction φ tels que :

$$\boxed{f(x_0 + h) = f(x_0) + ah + h\varphi(h)} \text{ avec } \lim_{h \to 0} \varphi(h) = 0$$

a est appelé le **nombre dérivé** de f en x_0, et on le note **f'(x_0)**.

Exemple : On veut calculer le nombre dérivé de la fonction f : $x \longmapsto x^3$ quand $x_0 = 2$.

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) &= f(2 + h) \\ &= (2 + h)^3 \\ &= (2 + h)(2 + h)^2 \\ &= (2 + h)(4 + 4h + h^2) \\ &= 8 + 8h + 2h^2 + 4h + 4h^2 + h^3 \\ &= 8 + 12h + 6h^2 + h^3 \end{aligned}$$

$$\boxed{f(2 + h) = \mathbf{8} + \mathbf{12}h + h(6h + h^2)} \text{ avec } \lim_{h \to 0} 6h + h^2 = 0$$

$$\boxed{f(2) = \mathbf{8}} \qquad \boxed{f'(2) = \mathbf{12}}$$

IV. FONCTION DERIVEE

a. Définition

On considère une fonction dérivable en tout point x_0 appartenant à un intervalle I. On va essayer de déterminer une formule de calcul qui permet de trouver tous les nombres dérivés de cette fonction sur cet intervalle (donc sans fixer de valeur à x_0) :

Exemple : Soit f : $x \longmapsto x^2$ dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout x_0, on a :

$f(x_0 + h) = (x_0 + h)^2 = x_0^2 + 2x_0.h + h^2 = x_0^2 + \underline{2x_0}.h + h \times \underline{h}$ avec a = $\boxed{f'(x_0) = 2x_0}$ et $\varphi(h) = h$

On peut donc facilement déterminer le nombre dérivé d'un réel quelconque, sans avoir a effectuer le développement de $f(x_0 + h)$: $f'(2) = 4$; $f'(-3) = -6$; $f'(\sqrt{5}) = 2\sqrt{5}$…

Définition :

Soit f dérivable sur un intervalle I. La fonction qui, à tout x de I, associe son nombre dérivé, est appelée **fonction dérivée** de f et est notée f'.

Exemple : La fonction f : $x \longmapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\boxed{f' : x \longmapsto 2x}$

b. Fonctions dérivées des fonctions usuelles

De la même façon, on détermine les fonctions dérivées suivantes :

fonction :	définie sur :	dérivable sur :	fonction dérivée :
$f(x) = k$ (constante)	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^n$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = 1/x^n$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -n/x^{n+1}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}^{+*}$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \sin x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = \cos x$

c. Opérations sur les fonctions dérivées

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un même intervalle I. On admettra les résultats suivants :

	f	f'
1. Somme	u + v	u' + v'
2. Produit par un réel constant	k.u	k.u'
3. Produit de deux fonctions	u.v	u'.v + u.v'
4. Carré d'une fonction	u²	2u'.u
5. Inverse	$\dfrac{1}{u}$ avec $u(x) \neq 0$ sur I	$\dfrac{-u'}{u^2}$
6. Quotient	$\dfrac{u}{v}$ avec $v(x) \neq 0$ sur I	$\dfrac{u'.v - u.v'}{v^2}$

d. Exemples

1. Somme

→ Soit $f(x) = x^2 + x^5$. Alors $f'(x) = 2x + 5x^4$.

2. Produit par un réel constant

→ Soit $f(x) = 2x^3$. Alors $f'(x) = 2(3x^2) = 6x^2$.
→ Soit $g(x) = 5x$. Alors $f'(x) = 5(1) = 5$.

Conséquence de **1.** et **2.** : Tout polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$.
→ $P(x) = 6x^3 + 3x^2 - 7x + 4$. Alors $P'(x) = 6(3x^2) + 3(2x) - 7(1) + 0 = 18x^2 + 6x - 7$

3. Produit de deux fonctions

→ Soit $f(x) = x\sqrt{x}$. Alors $f'(x) = 1.\sqrt{x} + x.\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{\sqrt{x} \times 2\sqrt{x} + x}{2\sqrt{x}} = \dfrac{3x}{2\sqrt{x}} = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$.

4. Carré d'une fonction

→ Soit $f(x) = (5x + 3)^2$. Alors $f'(x) = 2 \times 5 \times (5x + 3) = 10(5x + 3)$

5. Inverse

→ Soit $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 3}$. Alors $f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2 - 3)^2}$

6. Quotient

→ Soit $f(x) = \dfrac{x^2 + 3}{3x - 4}$. Alors $f'(x) = \dfrac{2x(3x - 4) - 3(x^2 + 3)}{(3x - 4)^2} = \dfrac{6x^2 - 8x - 3x^2 - 9}{(3x - 4)^2} = \dfrac{3x^2 - 8x - 9}{(3x - 4)^2}$

V. COMPOSEE AVEC UNE FONCTION AFFINE

Théorème :

Soit une fonction g obtenue en composant une fonction f et une fonction affine, donc $g(x) = f(ax + b)$.
Alors/

$$\boxed{g'(x) = a \times f'(ax + b)}$$

Exemple :

→ $f(x) = \sqrt{5x - 3}$. Alors $f'(x) = 5 \times \dfrac{1}{2\sqrt{5x - 3}} = \dfrac{5}{2\sqrt{5x - 3}}$