La dérivation constitue *l'objectif essentiel du programme d'analyse* de première ; cet objectif est double :
- Acquérir une bonne idée des *différents aspects de la dérivation en un point* ;
- Exploiter les énoncés du programme concernant les *fonctions dérivées* pour l'étude des fonctions ;

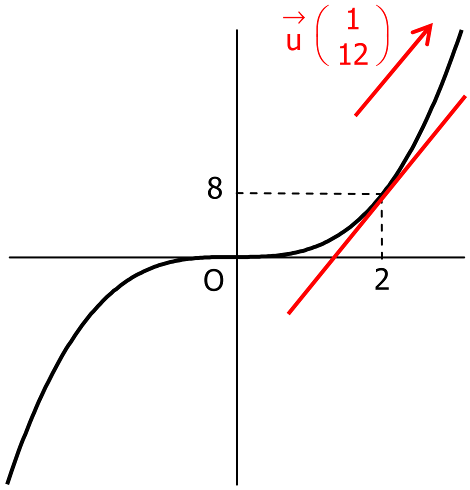
II est important que les élèves puissent *pratiquer* la dérivation pendant une durée suffisante ; il convient donc d'aborder ce chapitre assez tôt dans l'année.

Le programme comporte aussi une approche de la notion de limite en 0 d'une fonction : il s'agit de permettre aux élèves d'acquérir une *première idée* de cette notion et de fournir un langage commode pour introduire la *dérivée.* Il n'y a pas lieu de s'attarder sur la notion de limite ; la définition de limite par (ε ; α) et la notion de continuité sont hors programme, de même que *tout exercice de recherche de limite*.

PROGRAMMES	COMMENTAIRES
Limite en 0 d'une fonction : Limite en 0 des fonctions $h \longmapsto h$, $h \longmapsto h^2$, $h \longmapsto h^3$, $h \longmapsto \sqrt{h}$.. Introduction de la notation $\lim\limits_{h \to 0} f(h)$ dans le cas d'une limite finie. Dans ce cas, dire que $\lim\limits_{h \to 0} f(h) = L$ signifie aussi que $\lim\limits_{h \to 0} \lvert f(h) - L \rvert = 0$ ou encore que $f(h) = L + \varphi(h)$ où $\lim\limits_{h \to 0} \varphi(h) = 0$.	Pour cette introduction, on s'appuiera sur des expérimentations numériques et graphiques portant sur les fonctions de référence ci-contre. Pour donner une idée du cas général on peut dire, par exemple, pour le cas où $\lim\limits_{h \to 0} f(h) = 0$, que $\lvert f(h)\rvert < 10^{-1}$, 10^{-2}, … 10^{-9}, … 10^{-p}, dès que h est assez petit.
Dérivation en un point : Approximation par une fonction affine, au voisinage de 0, des fonctions que à h associent $(1+h)^2$, $(1+h)^3$, $\dfrac{1}{1+h}$, $\sqrt{1+h}$; aspect géométrique.	Il convient de combiner l'expérimentation (graphique et numérique) et le raisonnement ; on mettra en valeur sur quelques exemples l'influence de la taille de l'intervalle sur la qualité de l'approximation. On montrera aussi que cette étude permet d'approcher, par exemple, $x \longmapsto x^2$ au voisinage de 2. Sur les exemples étudiés, on n'hésitera pas à indiquer que des expressions telles que $3h + h^2$, $\dfrac{h}{1+h}$ tendent vers 0 lorsque h tend vers 0 ; il est inutile de formuler des énoncés sur les limites relatifs à la comparaison et aux opérations sur les limites.
Lorsque, au voisinage de 0, f(a + h) peut s'écrire sous la forme $f(a+h) = f(a) + Ah + h\varphi(h)$ avec $\lim\limits_{h \to 0} \varphi(h) = 0$, on dit que la fonction *f* admet *A* pour nombre dérivé au point a ; Aspect géométrique : tangente. Aspect mécanique : vitesse. Limite en zéro du taux de variation $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.	Le texte ci-contre suggère une démarche pour l'introduction du nombre dérivé ; le professeur peut adopter un autre choix. Quel que soit ce choix, il convient de mettre en valeur, *à travers l'étude de quelques exemples simples*, les différents aspects de cette notion mentionnés dans ce texte. On prendra notamment des exemples issus de la mesure de grandeurs géométriques et physiques (aire, volume, puissance, intensité...) ou de la vie économique et sociale (populations, prix...). L'étude de points singuliers, tels que $x \longmapsto \lvert x\rvert$ en 0 ou $x \longmapsto \sqrt{x}$ en 0, est hors programme.
Equation cartésienne de la tangente au point d'abscisse a.	On observera que, pour construire la tangente, il suffit de connaître son coefficient directeur, c'est-à-dire $f'(a)$; le recours à l'équation cartésienne est inutile.
Dérivation sur un intervalle. Fonction dérivée : Dérivée d'une somme, d'un produit par une constante, d'un produit, d'un inverse, d'un quotient. Dérivée de $x \longmapsto x^n$ (n entier relatif) et de $x \longmapsto \sqrt{x}$. Dérivée de $t \longmapsto f(at + b)$.	Les élèves doivent connaître les règles de dérivation et savoir les appliquer à des exemples ne présentant aucune complication technique, tels que $x + \dfrac{1}{x}$ ou $\dfrac{x}{x^2+1}$, ou encore $x(x-1)^2$. Pour les fonctions composées $t \longmapsto f(u(t))$, le programme se limite au cas où $u(t) = at + b$. Les démonstrations de ces règles ne sont pas au programme. La notation différentielle peut être donnée en liaison avec les autres matières, mais aucune connaissance à ce sujet n'est exigible en mathématiques. En liaison avec l'enseignement des autres disciplines, on habituera les élèves à lire le tableau des dérivées dans les deux sens, en employant le langage des primitives, mais aucune connaissance à ce sujet n'est exigible en mathématiques.
Application à l'étude du comportement local et global des fonctions (résultats admis) Si f est dérivable sur I et admet un maximum local (ou un minimum local) en un point a distinct des extrémités de I, alors f'(a)=0 Si f est dérivable sur l'intervalle I et si la dérivée f ' est nulle sur I, alors f est constante sur I. Si f est dérivable sur I, et si f ' est positive sur I, alors f est croissante sur I. Si f est dérivable sur [a;b], où a<b, et si f ' est à valeurs strictement positives sur [a;b], alors f est strictement croissante sur [a;b] et, pour tout élément λ de [f(a);f(b)] l'équation f(a)=λ admet une solution et une seule dans [a;b]. Énoncés analogues pour les fonctions décroissantes.	On mettra en valeur les interprétations graphiques et cinématiques des énoncés de ce paragraphe. On pourra mettre en évidence l'utilité des hypothèses à l'aide de quelques contre-exemples très simples illustrés par des graphiques. On observera d'abord que, si f est croissante sur I, alors f 'est positive sur I.

I. TANGENTE A UNE COURBE

Soit f une fonction dérivable en x_0.
On appelle **tangente à la courbe représentative de f au point x_0** la droite passant par le point A(x_0 ; f(x_0)) et de coefficient directeur f′(x_0).



Exemple :

La fonction f : $x \longmapsto x^3$ admet au point (2 ; 8) une tangente dont le coefficient directeur est 12.

Théorème :

Soit f une fonction dérivable en x_0.
La courbe représentative de f admet au point A(x_0 ; f(x_0)) une tangente dont l'équation réduite est :

$$\boxed{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$$

Exemple :

La tangente à f : $x \longmapsto x^3$ admet au point A(2 ; 8) admet pour équation :

$$y = 12(x - 2) + 8 \quad \Leftrightarrow \quad y = 12x - 24 + 8 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{y = 12x - 16}$$

II. SENS DE VARIATION D'UNE FONCTION

Théorème :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de ℝ.
Si f′(x) est **strictement positive** pour tout x de I, alors f est **strictement croissante** sur I
Si f′(x) est **strictement négative** pour tout x de I, alors f est **strictement décroissante** sur I

Exemple :

Soit f(x) = $2x^3 + 3x^2 - 12x + 6$.
→ On calcule la fonction dérivée : $f'(x) = 2(3x^2) + 3(2x) - 12 = 6x^2 + 6x - 12$
→ On étudie le signe de $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$
$\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \times 6 \times (-12) = 36 + 288 = 324 = 18^2$

Les deux solutions sont $x_1 = \dfrac{-6 + 18}{2 \times 6} = \dfrac{12}{12} = 1$ et $x_2 = \dfrac{-6 - 18}{2 \times 6} = \dfrac{-24}{12} = -2$

Et le signe de f′(x) est donc donné par :

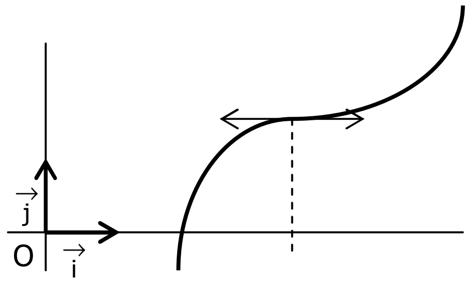
x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
f′(x)		+	0	−	0	+	
f(x)		↗	26	↘	-1	↗	

III. EXTREMUM

Théorème :
Si f est dérivable sur I et admet un extremum local (maximum ou minimum) en un point x_0 distinct des extrémités de I, alors $f'(x_0) = 0$

Exemple :
Soit $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 6$.
On constate sur le tableau de variation de f qu'elle admet un maximum local en -2 et un minimum local en 1.
Et on constate que :
$f'(-2) = 6 \times (-2)^2 + 6 \times (-2) - 12 = 24 - 12 - 12 = 0$ et $f'(1) = 6 \times 1^2 + 6 \times 1 - 12 = 6 + 6 - 12 = 0$

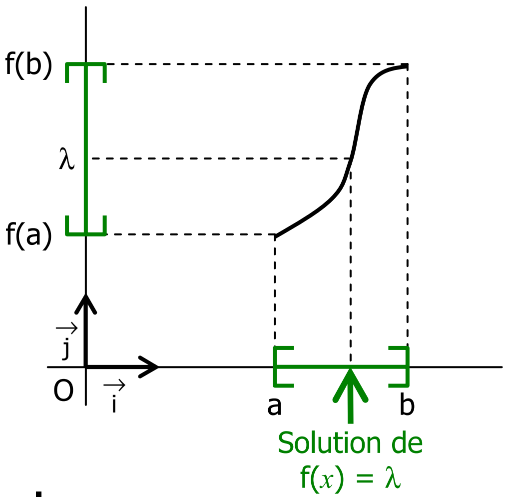
Attention : La réciproque n'est pas vraie : il existe des fonctions qui admettent une dérivée nulle en un point sans pour autant avoir un extremum en ce point. Cela signifie que la courbe admet une tangente horizontale mais sans changer de sens de variation. On dit alors qu'on a un **point d'inflexion**.



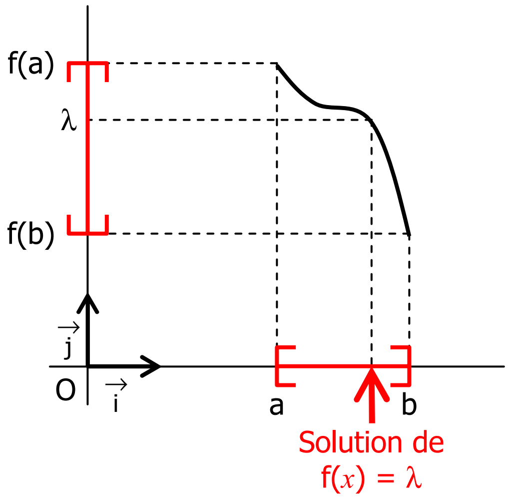
IV. EQUATION DE LA FORME $f(x) = \lambda$

Théorème :
Soit f est dérivable sur [a ; b], avec a < b :

Si f' est à valeurs strictement positives sur [a ; b],
Et si λ appartient à [f(a) ; f(b)]
Alors l'équation $f(x) = \lambda$ admet une solution et une seule dans [a ; b].



Si f' est à valeurs strictement négatives sur [a ; b],
Et si λ appartient à [f(b) ; f(a)]
Alors l'équation $f(x) = \lambda$ admet une solution et une seule dans [a ; b].



Exemple :
On considère la fonction $f : x \longmapsto x^2 - x - 3$ sur l'intervalle [0 ; 3]
→ On détermine $f'(x) = 2x - 1$
→ On étudie le signe de f :

x	0		$\frac{1}{2}$		3
$f'(x)$		−		+	

- f' est strictement positive sur [2 ; 3]
- **f(2)** $= 2^2 - 2 - 3 =$ **-1** et **f(3)** $= 3^2 - 3 - 3 =$ **3**
- $0 \in$ [**f(2)** ; **f(3)**]

Alors d'après le théorème, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution et une seule dans [2 ; 3].

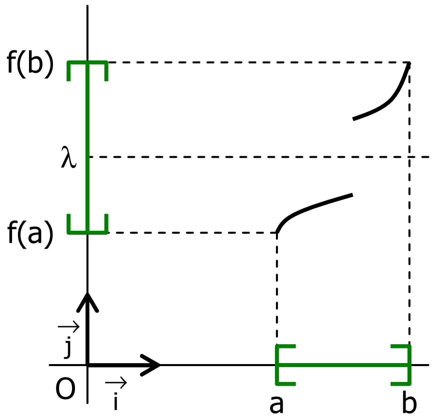
Remarques :

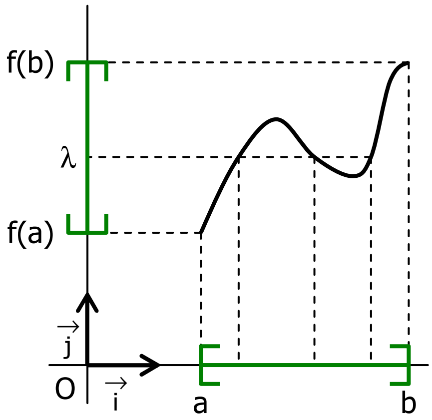
Pour utiliser ce théorème il faut bien vérifier que…

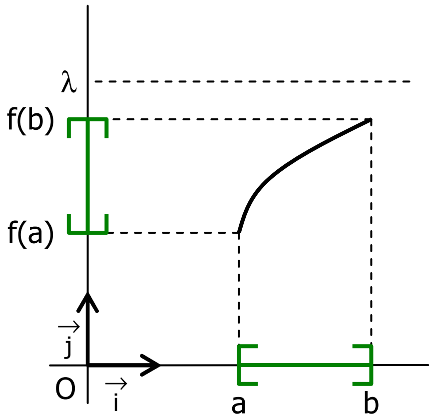
… f est **dérivable** sur [a ; b] sinon f(x) = λ risque de ne pas avoir de solution.

… f est **strictement croissante** (décroissante) sur [a ; b] sinon f(x) = λ risque d'avoir plusieurs solutions.

… **λ ∈ [f(a) ; f(b)]** sinon f(x) = λ n'aura pas de solution.







V. EXEMPLE D'ETUDE D'UNE FONCTION

Voici la marche à suivre pour étudier une fonction f définie sur un intervalle [a ; b]. Le but ultime de cette étude est le tracé de la courbe $\mathcal{C}$ représentant f, avec un maximum de renseignements.

1. Calcul de la dérivée de f

- En essayant de la mettre sous forme factorisée, ou sous la forme $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ où P et Q sont factorisés.
- On évitera de développer, en particulier les dénominateurs, surtout si ce sont des « carrés ».

2. Etude du signe de f'

- Si f est sous la forme $ax + b$ → Petit tableau de signe.
- Si f est sous la forme $ax^2 + bx + c$ → calcul du discriminant Δ et interprétation.
- Si f est un quotient, on étudie le signe du numérateur et du dénominateur. En particulier, on se souviendra que si l'un des deux est un carré, il est <u>toujours positif</u>.
- Si f contient des fonctions cos et/ou sin, on sera ramené à la résolution d'inéquations trigonométriques (le cercle peut être très utile) où l'on oubliera pas que cos x et sin x sont toujours compris entre -1 et 1.

3. Tableau de variation de f

- On traduit l'étude du signe de la dérivée : $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ croissante et $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ décroissante.
- Quand $f'(x) = 0$, cela signifie que $\mathcal{C}$ admet une tangente horizontale (maximum, minimum ou point d'inflexion).
- Ne pas oublier de calculer les valeurs de f aux points remarquables (bornes de l'ensemble de définition, maximum…)

4. Recherche des points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ avec les axes (Ox) et (Oy)

- Intersection de $\mathcal{C}$ avec (Ox) : On cherche le(les) nombres x_0 tel que $f(x_0) = 0$

  → $\mathcal{C}$ coupe (Ox) au(x) point(s) de coordonnées $(x_0 ; 0)$
- Intersection de $\mathcal{C}$ avec (Oy) : On calcule f(0)

  → $\mathcal{C}$ coupe (Oy) au point de coordonnées (0 ; f(0))

5. Tangentes à la courbe aux points remarquables

- On connaît déjà les tangentes horizontales (voir **2.** et **3.**)

- On détermine la (les) tangente(s) au(x) point(s) d'intersection avec les axes, déterminé(s) dans le **4.** en utilisant la formule $y = f'(x_0)\,(x - x_0) + f(x_0)$

6. Construction de la courbe

- Tracer les deux axes, en respectant bien l'échelle donnée dans l'énoncé, et en restreignant l'axe (Ox) à l'ensemble de définition de la fonction.
- Placer les points d'intersection avec les axes, les maximums, minimums, points d'inflexion.
- Construire les tangentes (inutile de tracer « entièrement » la droite, se contenter du petit morceau autour du point de tangence).
- Construire la courbe en lissant autant que possible, et évitant les points anguleux.