PROGRAMMES	COMMENTAIRES
Suites arithmétiques et géométriques définies respectivement par $u_{n+1} = u_n + a$ et $u_{n+1} = b.u_n$ et une valeur initiale u_0. Expression du terme de rang p. Calcul de $1 + 2 + ... + n$ et de $1 + b + b^2 + … + b^n$.	L'étude générale des suites et la notion de convergence sont en dehors du programme.
Exemples d'étude de situations conduisant à des suites arithmétiques ou géométriques (radioactivité, prêts, évolution de populations...).	

I. SUITES

On appelle suite toute fonction de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$, qui à un nombre n associe son image u_n, appelé **terme général** de la suite.

On peut la définir (c'est-à-dire permettre de déterminer les termes u_1, u_2, u_3 … de deux façons différentes :

→ A la façon d'une fonction, en donnant un moyen de calculer directement u_n à partir de n.

Exemple : $u_n = \dfrac{1}{n}$

$u_1 = 1$

$u_2 = \dfrac{1}{2}$

$u_3 = \dfrac{1}{3}$ (…)

→ Par **récurrence**, c'est-à-dire en donnant $\begin{cases}\text{Le premier terme } u_0 \\ \text{La relation qui relie un terme } u_n \text{ à son suivant } u_{n+1}\end{cases}$

Exemple : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$

$u_1 = 3$

$u_2 = 7$

$u_3 = 15$ (…)

II. SUITES ARITHMETIQUES

a. Définition

On appelle suite arithmétique toute suite numérique dont chaque terme s'obtient en ajoutant un nombre constant r appelé **raison** de la suite.

Elle est donc définie par récurrence par : $\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = u_n + r \end{cases}$

Exemple : $\begin{cases} u_0 = -7 \\ u_{n+1} = u_n + 4 \end{cases}$

$u_1 = -3$

$u_2 = 1$

$u_3 = 5$

$u_4 = 9$ (…)

b. Propriété

Soit (u_n) une suite arithmétique de 1er terme u_0 et de raison r.

Alors pour tout n, on a : $\boxed{u_n = u_0 + nr}$

Exemple : (u_n) est une suite arithmétique de 1er terme $u_0 = -7$ et de raison $r = 4$

$u_1 = -7 + 1 \times 4 = -3$

$u_2 = -7 + 2 \times 4 = 1$

$u_3 = -7 + 3 \times 4 = 5$

$u_4 = -7 + 4 \times 4 = 9$ (…)

c. Somme des premiers termes d'une suite arithmétique

Propriété :
La somme S_n des « n premiers entiers » est donnée par la formule :

$$\boxed{S_n = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

Démonstration :

On sait que : $S_n = 1 + 2 + \ldots + (n-1) + n$

Mais on peut aussi écrire : $S_n = n + (n-1) + \ldots + 2 + 1$

En additionnant on obtient : $2S_n = (n+1) + (n+1) + \ldots + (n+1) + (n+1)$

Donc $2S_n = n(n+1)$

D'où :

$$\boxed{S_n = \frac{n(n+1)}{2}} \quad \text{(CQFD)}$$

Propriété :
La somme des $n + 1$ premiers termes (de u_0 à u_n) d'une suite arithmétique est :

$$\boxed{S = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \frac{(u_0 + u_n)(n+1)}{2}}$$

ou

$$\boxed{S = \frac{(\text{premier terme} + \text{dernier terme}) \times \text{nombre de termes}}{2}}$$

Démonstration :

Soit $S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$

Or d'après la propriété, pour tout n on a : $u_n = u_0 + nr$

$$\begin{aligned}
\text{Donc} \quad S &= u_0 + (u_0 + 1r) + (u_0 + 2r) + \ldots + (u_0 + nr)\\
&= (n+1)u_0 + r\,(\mathbf{1 + 2 + \ldots + n})\\
&= (n+1)u_0 + r\,\frac{\mathbf{n(n+1)}}{\mathbf{2}} \text{ (propriété précédente)}\\
&= \frac{n+1}{2}(2u_0 + nr)\\
&= \frac{n+1}{2}(u_0 + \mathbf{u_0 + nr})\\
&= \boxed{\frac{n+1}{2}(u_0 + \mathbf{u_{n+1}})} \quad \text{(CQFD)}
\end{aligned}$$

III. SUITES GEOMETRIQUES

a. Définition

On appelle suite géométrique toute suite numérique dont chaque terme s'obtient en multipliant par un nombre q constant appelé **raison** de la suite.

Elle est donc définie par récurrence par $\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = q.u_n \end{cases}$

Exemple : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 2.u_n \end{cases}$

$u_1 = 6$
$u_2 = 12$
$u_3 = 24$
$u_4 = 48$ (…)

b. Propriété

Soit (u_n) une suite géométrique de 1er terme u_0 et de raison q.

Alors pour tout n, on a : $\boxed{u_n = u_0.q^n}$

Exemple : (u_n) est une suite géométrique de 1er terme $u_0 = 3$ et de raison $r = 2$

$u_1 = 3 \times 2^1 = 6$
$u_2 = 3 \times 2^2 = 12$
$u_3 = 3 \times 2^3 = 24$
$u_4 = 3 \times 2^4 = 48$ (…)

c. Somme des premiers termes d'une suite arithmétique

Propriété :

La somme des $n + 1$ premières puissances (de q^0 à q^n) d'un nombre q (avec $q \neq 1$) est donnée par la formule :

$$\boxed{1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}}$$

Démonstration :

On sait que : $S = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n$

En multipliant par q : $qS = q + q^2 + \ldots + q^n + q^{n+1}$

En retranchant : $S - qS = 1 - q^{n+1}$

$\Leftrightarrow (1 - q)S = 1 - q^{n+1}$

$\Leftrightarrow \boxed{S = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}}$ (CQFD)

Propriété :

La somme des $n + 1$ premiers termes (de u_0 à u_n) d'une suite géométrique est :

$$\boxed{S = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = u_0.\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}}$$

ou

$$\boxed{S = \text{premier terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{n+1}}{1 - \text{raison}}}$$

Démonstration :

On sait que : $S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$

$\Leftrightarrow S = u_0 + u_0.q + u_0.q^2 + \ldots + u_0.q^n$

$\Leftrightarrow S = u_0.(1 + q + q^2 + \ldots + q^n)$

$\Leftrightarrow \boxed{S = u_0\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}}$ (CQFD)