| PROGRAMMES | COMMENTAIRES |
|---|---|
| Sommes $a + bi$ où $i^2 = -1$ ; égalité, somme, produit, conjugué, inverse.<br><br>Représentation géométrique, affixe d'un point, d'un vecteur.<br><br>Module et argument : interprétation géométrique.<br><br>Passage de la forme algébrique à la forme trigonométrique et inversement. | Les élèves doivent connaître les deux écritures $a + bi$ et $a + bj$, cette dernière étant utilisée en électricité.<br><br>La résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation du second degré, y compris l'équation $z^2 = a$ n'est pas au programme. On pourra indiquer les propriétés du module et de l'argument d'un produit ou d'un quotient qui sont utilisées en sciences physiques, mais l'exploitation de ces propriétés n'est pas au programme de mathématiques de première. |
| TP : Exemples de calculs sur les nombres complexes. | On évitera toute technicité dans les exercices de calcul trigonométrique. |

## I. NOMBRES COMPLEXES

### a. Le nombre « $i$ »

Il existe un nombre, noté $i$, qui a la propriété suivante : $\boxed{i^2 = -1}$

### b. Forme algébrique d'un nombre complexe

On appelle **nombre complexe** tout nombre sous la forme $\boldsymbol{a + bi}$ où $a$ et $b$ sont deux nombres réels.
Cette écriture est appelée **forme algébrique** du nombre complexe.

L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.

Soit $z = a + bi$ un nombre complexe.
Le nombre $a$ est appelé **partie réelle** de $z$, et noté $\text{Re}(z)$
Le nombre $b$ est appelé **partie imaginaire** de $z$, et noté $\text{Im}(z)$

**Exemple :**

$z = 3 + 4i$ est un nombre complexe. $\text{Re}(z) = 3$ et $\text{Im}(z) = 4$

**Remarques :**

- La partie imaginaire d'un nombre complexe est un nombre réel.
- Si $\text{Im}(z) = 0$, alors $z$ est un nombre réel.
- Si $\text{Re}(z) = 0$, $z$ est un **imaginaire pur**.
- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

### c. Egalité de deux nombres complexes

Soit $z = a + bi$ et $z' = a' + b'i$ deux nombres complexes.

$$\boxed{z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}}$$

### d. Addition des nombres complexes

Soit $z = a + bi$ et $z' = a' + b'i$ deux nombres complexes.

$$\boxed{z + z' = (a + a') + (b + b')i}$$

**Exemple :**

Soit $z = 4 + 3i$ et $z' = -2 + 5i$
$z + z' = (4 + 3i) + (-2 + 5i) = (4 - 2) + (3 + 5)i = 2 + 8i$

### e. Mutiplication de nombres complexes

Soit $z = a + bi$ et $z' = a' + b'i$ deux nombres complexes.

$$\boxed{z \times z' = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i}$$

**Exemple :**

Soit $z = 4 + 3i$ et $z' = -2 + 5i$
$z \times z' = (4 + 3i)(-2 + 5i) = 4 \times (-2) + 4 \times 5i + 3i \times (-2) + 3i \times 5i = -8 + 20i - 6i - 15 = -23 + 14i$

## f. conjugué

Soit $z = a + bi$ un nombre complexe. On appelle **conjugué de** $z$ le nombre $\boldsymbol{a - bi}$ noté $\overline{z}$.

**Exemple :**

Le conjugué de 4 + 3$i$ est 4 – 3$i$.

**Propriétés :**

$$\boxed{\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}} \qquad \boxed{\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}} \qquad \boxed{z \times \overline{z} = a^2 + b^2}$$

## g. Inverse

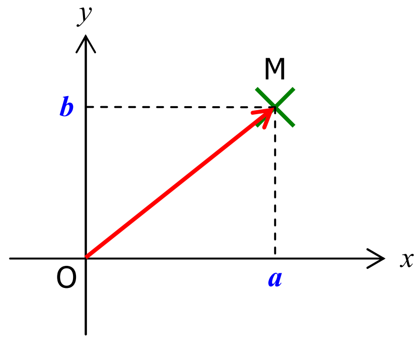
Soit $z = a + bi$ un nombre complexe.

L'inverse de $z$ est le nombre $$\boxed{\frac{1}{z} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\, i}$$

## II. GEOMETRIE ET NOMBRES COMPLEXES

Dans un repère **orthonormal**, on dit que :

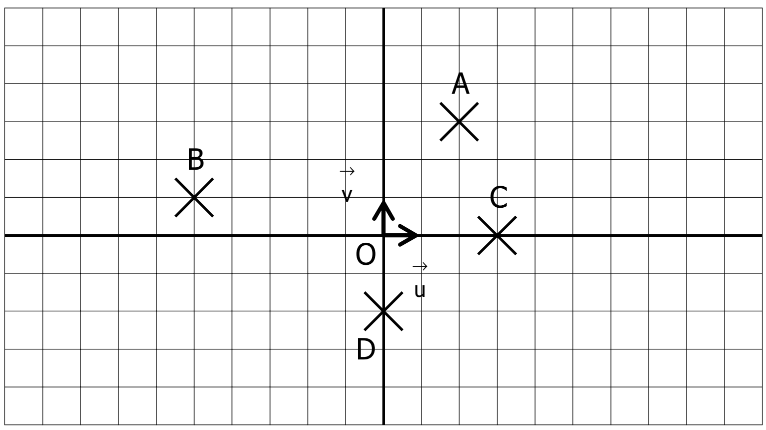
- le nombre $z = a + bi$ est **l'affixe** du point M($a$ ; $b$) ou du vecteur $\overrightarrow{OM}$.
- le point M est **l'image** du nombre $z = a + bi$.
- le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est **le vecteur image** du nombre $z = a + bi$.




$\boxed{a = \text{Re}(z) \text{ est l'}\textbf{abscisse}\text{ de M}}$ $\boxed{b = \text{Im}(z) \text{ est l'}\textbf{ordonnée}\text{ de M}}$

**Exemple :**

Placer dans le repère les points A (2 + 3$i$), B (-5 + $i$), C (3) et D (-2$i$) :



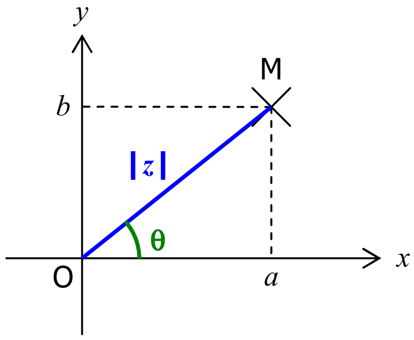

**Remarques :**

- pour éviter les confusions, le repère ne s'appellera plus (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) mais (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$)
- le plan muni de ce repère est appelé **plan complexe**.
- tout nombre réel aura son image sur l'axe des abscisses désormais appelé « **axe des réels** »
- tout nombre imaginaire pur aura son image sur l'axe des ordonnées désormais appelé « **axe des imaginaires** »

## III. FORME TRIGONOMETRIQUE

### a. Module et argument

Soit M le point du plan complexe qui a pour affixe $z = a + bi$.

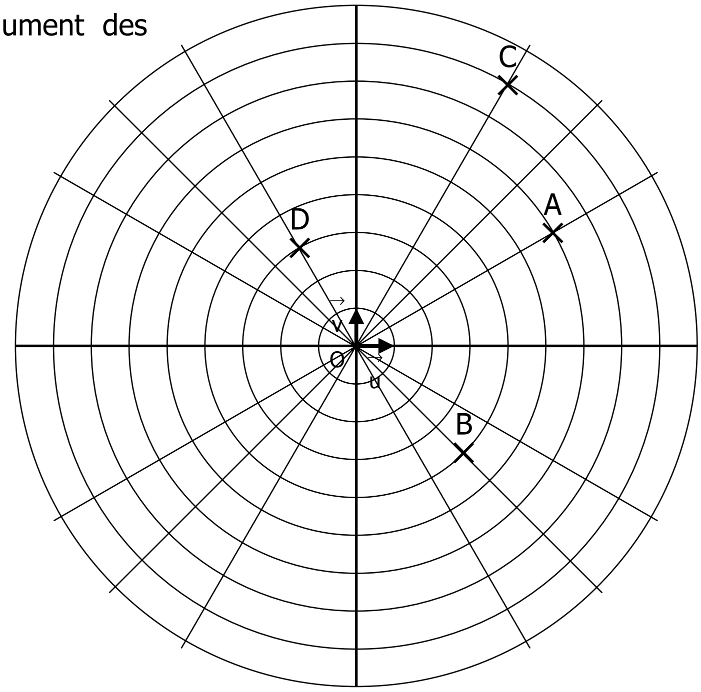



On appelle **module de $z$** et on note $|z|$ le nombre $|z| = OM = \|\overrightarrow{OM}\|$

On appelle **argument de $z$** (non nul) et on note **arg($z$)** tout nombre de la forme $\theta + k2\pi$ où $\theta$ est une mesure de l'angle orienté $\widehat{xOM}$.

**Exemple :**

Lire sur le dessin le module et l'argument des affixes de A, B, C et D :




A : Module = 5

Argument = $\frac{\pi}{6}$

B : Module = 4

Argument = $-\frac{\pi}{4}$

C : Module = 7

Argument = $\frac{\pi}{3}$

D : Module = 3

Argument = $\frac{2\pi}{3}$

### b. Calcul du module

Soit M le point du plan complexe qui a pour affixe $z = a + bi$.

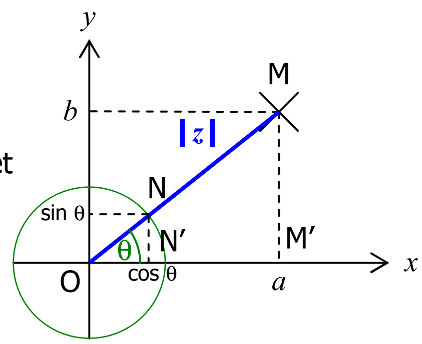
D'après le théorème de Pythagore (voir figure du **a.**) : $|z|^2 = a^2 + b^2 = z\,\overline{z}$ d'où :

$$\boxed{|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\,\overline{z}}}$$

### c. Détermination de l'argument

Soit M le point du plan complexe qui a pour affixe $z = a + bi$.

Soit N le point du cercle trigonométrique qui a le même argument ($\theta$) que $z$.




L'affixe de N est $z' = \cos\theta + i\sin\theta$

D'après le théorème de Thalès dans le triangle OMM', où les droites (MM') et (NN') sont parallèles :

$$\frac{ON}{OM} = \frac{ON'}{OM'} = \frac{NN'}{MM'} \Leftrightarrow \frac{1}{|z|} = \frac{\cos\theta}{a} = \frac{\sin\theta}{b}$$

d'où les formules qui permettent de déterminer $\theta$ :

$$\boxed{\cos\theta = \frac{a}{|z|} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}} \quad \text{et} \quad \boxed{\sin\theta = \frac{b}{|z|} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

## d. Forme trigonométrique

On appelle **forme trigonométrique de** $z$ la notation $[\rho\ ;\ \theta]$ où $\begin{cases}\rho \text{ est le module de } z \\ \theta \text{ est l'argument de } z\end{cases}$

**Exemples simples :**

La forme trigonométrique de 1 est $[1\ ;\ 0]$

La forme trigonométrique de $i$ est $[1\ ;\ \frac{\pi}{2}]$

**Propriétés :**

Pour tout nombre complexe, on peut passer d'une forme à une autre en utilisant les formules :

$\boxed{|z| = \sqrt{a^2+b^2} = \rho}$ $\boxed{\cos\theta = \dfrac{a}{|z|}}$ $\boxed{\sin\theta = \dfrac{b}{|z|}}$ $\boxed{a = \rho.\cos\theta}$ $\boxed{b = \rho.\sin\theta}$

**Exemple 1 :**

Soit $z$ un nombre complexe dont la forme algébrique est $z = -1 + i\sqrt{3}$

$|z| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

$\begin{cases}\cos\theta = \dfrac{-1}{|z|} = \dfrac{-1}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{|z|} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$ et on reconnaît là des valeurs remarquables du sinus et du cosinus : $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$

La forme trigonométrique de $z$ est donc $\mathbf{[2\ ;\ \frac{2\pi}{3}]}$

**Exemple 2 :**

Soit $z$ un nombre complexe dont la forme trigonométrique est $[5\ ;\ \frac{\pi}{6}]$

$\begin{cases}a = \rho.\cos\theta = 5 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 5\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ b = \rho.\sin\theta = 5 \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{2}\end{cases}$ en utilisant les valeurs remarquables du sinus et du cosinus de $\theta = \dfrac{\pi}{6}$

La forme algébrique de $z$ est donc $\mathbf{z = \dfrac{5\sqrt{3}}{2} + \dfrac{5}{2}i}$

## IV. MODULE ET ARGUMENT D'UNE DIFFERENCE

### a. affixe d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$

Soit A d'affixe $z_A$ et B d'affixe $z_B$ deux points distincts.

Alors $\boxed{\overrightarrow{AB} \text{ a pour affixe } z_B - z_A}$

(Se démontre en utilisant les affixes de $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ puis $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$)

**Exemple :**

Soit A d'affixe $z_A = -2 + 2i$ et B d'affixe $z_B = 3 + 4i$

Alors l'affixe de $\overrightarrow{AB}$ est : $z_B - z_A = (3+4i) - (-2+2i) = 3 + 4i + 2 - 2i = 5 + 2i$

### b. Distance entre deux points

Soit A d'affixe $z_A$ et B d'affixe $z_B$ deux points distincts.

Alors $\boxed{\mathbf{AB} = \left\| \overrightarrow{\mathbf{AB}} \right\| = |z_B - z_A|}$

**Exemple :**

La distance AB de l'exemple précédent est : $|z_B - z_A| = |5 + 2i| = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}$

**c. Angle d'un vecteur avec $\vec{u}$**

Soit A d'affixe $z_A$ et B d'affixe $z_B$ deux points distincts.

Alors l'angle du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et du vecteur unité $\vec{u}$ est : $\boxed{(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A)}$

**Exemple :**

Soit A d'affixe $z_A = 2 + 5i$ et B d'affixe $z_B = 3 + 4i$

L'affixe de $\overrightarrow{AB}$ est : $z_B - z_A = (3 + 4i) - (2 + 5i) = 3 + 4i - 2 - 5i = 1 - i$

$|z_B - z_A| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = \dfrac{-\sqrt{2}}{2} \end{cases} \text{ donc } \theta = (\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{AB}) = -\frac{\pi}{4}$$