Le travail sur les séries statistiques et les probabilités mené en classe de seconde se poursuit avec la mise en place de nouveaux outils. Les sciences et techniques industrielles et du laboratoire fournissent un large éventail de sujets d'étude. Cette partie est organisée selon trois objectifs principaux :

(…)

- **Mettre en place la loi binomiale :** On s'appuie sur l'expérimentation et la simulation pour étudier le schéma de Bernoulli. On introduit la notion de variable aléatoire et on installe la loi binomiale dont les utilisations sont nombreuses dans les domaines technologiques.
- **Expérimenter la notion de différence significative par rapport à une proportion attendue :** L'acquisition de la loi binomiale permet de poursuivre la formation des élèves dans le domaine de l'échantillonnage et des procédures de prise de décision en contexte aléatoire. On fait remarquer que, pour une taille de l'échantillon importante, on conforte les résultats vus en classe de seconde.

CONTENUS	CAPACITES ATTENDUES	COMMENTAIRES
Probabilités Schéma de Bernoulli. Variable aléatoire associée au nombre de succès dans un schéma de Bernoulli.	- Représenter un schéma de Bernoulli par un arbre pondéré. - Simuler un schéma de Bernoulli.	Pour la répétition d'expériences identiques et indépendantes, la probabilité d'une liste de résultats est le produit des probabilités de chaque résultat. La notion de probabilité conditionnelle est hors programme. L'étude du schéma de Bernoulli se prête particulièrement à des activités algorithmiques. Aucun développement théorique à propos de la notion de variable aléatoire n'est attendu.
Loi binomiale. Espérance, variance et écart type de la loi	- Reconnaître des situations relevant de la loi binomiale - Calculer une probabilité dans le cadre de la loi binomiale à l'aide de la calculatrice ou du tableur. - Représenter graphiquement la loi binomiale. - Interpréter l'espérance comme valeur moyenne dans le cas d'un grand nombre de répétitions.	Pour introduire la loi binomiale, la représentation à l'aide d'un arbre est privilégiée : il s'agit ici d'installer une représentation mentale efficace. Pour $n \leq 4$ on peut ainsi dénombrer les chemins de l'arbre réalisant k succès pour n répétitions et calculer la probabilité d'obtenir k succès. Après cette mise en place, on utilise une calculatrice ou un logiciel pour calculer directement des probabilités et représenter graphiquement la loi binomiale. La formule donnant l'espérance de la loi binomiale est conjecturée puis admise, celle de la variance est admise. À l'aide de simulations de la loi binomiale et d'une approche heuristique de la loi des grands nombres, on conforte expérimentalement les résultats précédents. On peut simuler la loi binomiale avec un algorithme.
Echantillonnage Utilisation de la loi binomiale pour une prise de décision à partir d'une fréquence observée sur un échantillon.	- Déterminer à l'aide de la loi binomiale un intervalle de fluctuation, à environ 95 %, d'une fréquence. - Exploiter un tel intervalle pour rejeter ou non une hypothèse sur une proportion.	L'intervalle de fluctuation peut être déterminé à l'aide d'un algorithme ou d'un tableur. On peut traiter quelques situations liées au contrôle en cours de fabrication ou à la réception d'une production. Le vocabulaire des tests (test d'hypothèse, hypothèse nulle, risque de première espèce) est hors programme.

I. VARIABLE ALEATOIRE

a. Définition :

On appelle variable aléatoire X un nombre, résultat d'une expérience aléatoire.

Exemple :
- le résultat d'un dé lancé.
- le gain en € à une loterie
- la taille d'un individu choisi au hasard dans une foule

…

b. Loi de probabilité

La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est le tableau où x_1, x_2, … et x_n sont les différentes valeurs de X et p_1, p_2, … et p_n sont les probabilités associées à chaque valeur de X.

Valeurs de X	x_1	x_2	…	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	…	p_n

Exemple :

On lance deux pièces et on définit la variable aléatoire X par le nombre de « Face » obtenu.

Ω = {PP ; PF ; FP ; PP} donc
- PP : X = 0 et *1 chance sur 4*
- PF ou FP : X = 1 et *2 chances sur 4*
- FF : X = 2 et *1 chance sur 4*

La loi de probabilité de X est :

Valeurs de X	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

c. Caractéristiques d'une variable aléatoire discrète :

Soit X une variable aléatoire qui prend n valeurs x_1, x_2, … et x_n et p_1, p_2, … et p_n les probabilités associées.

Espérance mathématique : $\boxed{E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i}$

Remarque :
L'espérance mathématique est parfois notée $\overline{X}$ et correspond à la valeur moyenne de X, ou le « gain moyen » dans un jeu de hasard.

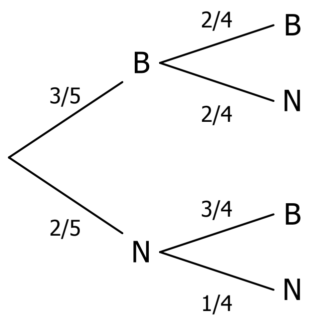
Variance : $\boxed{\mathrm{Var}X = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - (E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2}$ parfois notée **V(X)**

Ecart-type : $\boxed{\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}X}}$

II. SCHEMA DE BERNOULLI

a. Arbre de dénombrement :
Lorsqu'on reproduit plusieurs épreuves successivement, on peut dénombrer les différentes combinaisons à l'aide d'un arbre. Chaque branche est pondérée par sa probabilité.

Exemple :
Une urne contient 5 boules. 3 blanches et 2 noires. On en tire deux, successivement, et sans remise.



P(B,B) = 3/5 × 2/4 = 6/20

P(B,N) = 3/5 × 2/4 = 6/20

P(N,B) = 2/5 × 3/4 = 6/20

P(N,N) = 2/5 × 1/4 = 2/20

b. Epreuve (ou expérience) de Bernoulli
Lorsqu'une expérience aléatoire ne comporte que deux issues, le succès (de probabilité p) et l'échec (de probabilité 1 – p = q) on dit que c'est une épreuve de Bernoulli.

Exemples :
→ je lance une pièce et je gagne si j'obtiens « face » :
succès (p = 0,5)
échec (q = 0,5)
→ je tire une carte dans un jeu de 32 et je gagne si j'obtiens un as :
succès (p = 4/32)

échec ($q = 28/32$)

c. Schéma de Bernoulli

Lorsqu'on reproduit n fois, de façon **indépendante** une épreuve de Bernoulli de paramètre p, l'expérience ainsi obtenue est appelé schéma de Bernoulli.

On peut le représenter à l'aide d'un arbre de probabilité.

Exemple :

→ je lance 10 fois une pièce et je compte le nombre de « FACE » (entre 0 et 10)

→ je tire 5 cartes dans un jeu de 32 **avec remise** et je compte le nombre d'AS obtenus (entre 0 et 5)

d. Combinaison de p éléments choisis parmi n éléments

Exemple 1 :

Avec la lettre « A » on peut écrire 1 seul mot : A

Avec les 2 lettres « A » et « B » on peut écrire 2 mots : AB et BA.

Avec les 3 lettres « A », « B » et « C » on peut écrire 6 mots : ABC, ACB, BAC, BCA, CAB et CBA

Avec les 4 lettres « A », « B », « C » et « D » on peut écrire 24 mots : ABCD, ABDC, ACBD, ACDB…

On dira que :
1 élément peut être permuté de 1 façon
2 éléments peuvent être permutés de 2 façons
3 éléments peuvent être permutés de 6 façons
4 éléments peuvent être permutés de 24 façons

D'une façon générale, n éléments peuvent être permutés de $1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$ façons.

n ! se dit « n factorielle » et correspond au **nombre de permutations** de n éléments.

Exemple 2 :

On observe un championnat où il y a 20 clubs dont les 3 premiers sont relégués en seconde division. Il y a $20 \times 19 \times 18$ arrangements possibles. MAIS l'ordre nous importe peu (Exemple ; $18^{\text{ème}}$ Paris - $19^{\text{ème}}$ Marseille - $20^{\text{ème}}$ Lyon est identique à $18^{\text{ème}}$ Marseille - $19^{\text{ème}}$ Lyon - $20^{\text{ème}}$ Paris).

Il faut donc diviser par 3! c'est à dire le nombre de permutations de chaque « tiercé ».

Il y a donc $\dfrac{20 \times 19 \times 18}{3 \times 2 \times 1}$ combinaisons possibles.

En règle générale, le **nombre de combinaisons** (sans tenir compte de l'ordre) de **p** éléments parmi **n** est :

$$C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-p+1)}{p!} = \mathbf{\frac{n!}{(n-p)!p!}}$$

Propriété des C_n^p

$$\boxed{C_n^0 = C_n^n = 1}$$

$$\boxed{C_n^1 = C_n^{n-1} = n}$$

$$\boxed{C_n^p = C_n^{n-p}}$$

$$\boxed{C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p}$$

n \ p	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1							
2	1	1						
3	1	2	1					
4	1	3	3	1				
5	1	4	6	4	1			
6	1	5	10	10	5	1		
7	1	6	15	20	15	6	1	
8	1	7	21	35	35	21	7	1

Exemples :

J'ai 18 joueurs dans mon effectif. Combien d'équipe de 11 joueurs puis-je composer ?

→ $C_{18}^{11} = \dfrac{18\,!}{7\,!\,11\,!} = 31\,824$

A la machine :

CASIO : la commande est **OPTN/PROB/nCr** et on tape « n **nCr** k »
T.I. : la commande est **MATH/PRB/Combinaison** et on tape « n **Combinaison** k »

III. LOI BINOMIALE

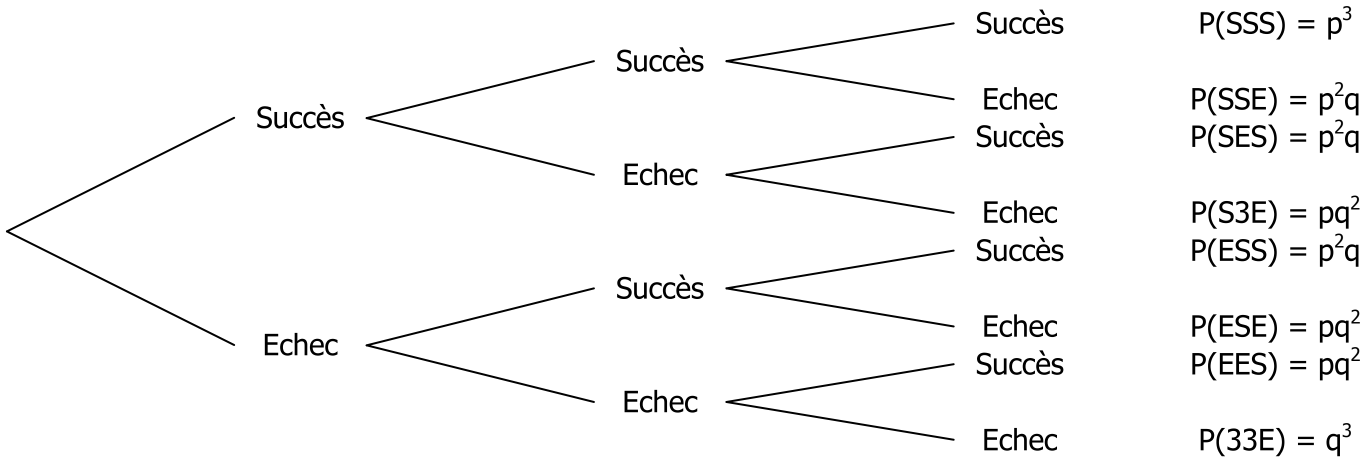
a. Définition :

On considère une épreuve de Bernoulli de probabilité de succès p (et donc probabilité d'échec q = 1 – p).

Si on répète une telle épreuve n fois, la variable aléatoire X égale au nombre de succès suit une **loi de probabilité binomiale de paramètres n et p** notée **B(n ; p)**.

On peut obtenir un nombre de succès allant de 0 à n.

Si on représente les expériences par un arbre de dénombrement on obtient (pour n = 3)



On constate que : Il y a 1 façon d'avoir X = 0 : EEE. Donc $P(X = 0) = q^3$
Il y a 3 façons d'avoir X = 1 : SEE, ESE et EES. Donc $P(X = 1) = 3pq^2$
Il y a 3 façons d'avoir X = 2 : SSE, SES et ESS. Donc $P(X = 2) = 3p^2q$
Il y a 1 façon d'avoir X = 3 : SSS. Donc $P(X = 3) = p^3$

D'une façon générale, si X si on reproduit n fois l'épreuve de Bernoulli on a :

$$\boxed{P(X = k) = C_n^k\, p^k\, q^{n-k}}$$

Exemple :

On lance 10 fois une pièce et on compte le nombre de « Face ». La loi de probabilité est donnée par la loi binomiale B(10 ; 0,5) ;

Alors : $P(X = 3) = C_{10}^{3}\, 0{,}5^3\, (1 - 0{,}5)^7 = 120 \times 0{,}125 \times 0{,}0078125 \approx$ **0,1171185**

A la machine, pour calculer P(X = k) on utilise les commandes suivantes :

CASIO : la commande est **DISTI/Binom** et on paramètre n (numtrial), p et k (x)
T.I. : la commande est **distrib/BinomFdP** et on tape « **BinomFdP(n,p,k)** »

b. Espérance, Variance et écart-type.

On admettra que si la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres n et p (donc q = 1 – p), alors :

$\boxed{E(X) = np}$ $\boxed{V(X) = npq}$ $\boxed{\sigma(X) = \sqrt{npq}}$

Exemple :

On lance 10 fois une pièce et on compte le nombre de « Face ». La loi de probabilité est donnée par la loi normale $B(10 ; 0,5)$;

$E(X) = 10 \times 0,5 =$ **5** : C'est le nombre moyen de « Face » sur 10 tentatives.

c. Conditions à vérifier pour justifier que X suit une loi binomiale :

1. *On reproduit n épreuves de Bernoulli indépendantes comportant deux issues « succès » et « échec » de probabilités respectivement p et q.*

2. *On répète n fois cette.*

3. *La variable aléatoire X est égale au nombre de succès.*