I. NOTION D'INTERVALLE

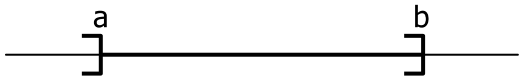
On appelle un intervalle l'ensemble des nombres déterminés par une inégalité ou un encadrement :

a. Intervalles bornés :

- L'ensemble des réels x tels que a $\leq x \leq$ b est noté [a ; b]

- L'ensemble des réels x tels que a $< x <$ b est noté]a ; b[

- L'ensemble des réels x tels que a $< x \leq$ b est noté]a ; b]

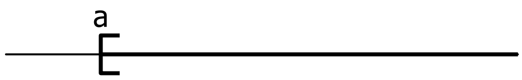


- L'ensemble des réels x tels que a $\leq x <$ b est noté [a ; b[

a et b sont appelées les **bornes** de l'intervalle.
[a ; b] est un intervalle **fermé**, **]a ; b[** est un intervalle **ouvert**.

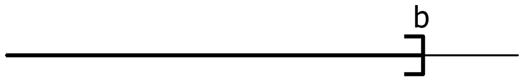
b. Intervalles non bornés

- L'ensemble des réels x tels que a $\leq x$ est noté [a ; +∞[



- L'ensemble des réels x tels que a $< x$ est noté]a ; +∞[

- L'ensemble des réels x tels que $x \leq$ b est noté]-∞ ; b]



- L'ensemble des réels x tels que $x <$ b est noté]-∞ ; b[

Remarque :

L'ensemble $\mathbb{R}$ de tous les réels peut aussi être noté]-∞ ; +∞[

II. NOTION DE FONCTION

a. Définition

Soit D un ensemble de nombre (un intervalle ou une réunion d'intervalles).
On appelle **fonction** f sur l'ensemble D le « mécanisme mathématique » qui permet d'associer à tout nombre x de D en un réel unique noté f(x). On note f : $x \longmapsto$ f(x).

b. Vocabulaire

- f(x) est l'**image** de x ;
- x est l'**antécédent** de f(x) ;
- D est l'**ensemble de définition** (ou domaine de définition) de f.

Exemple :

Sur l'intervalle [-2 ; 2], on définit la fonction f par : $x \longmapsto f(x) = (x-1)^2 - 3$

L'**algorithme** de cette fonction se présente donc ainsi :

- Prendre un nombre x
- Retrancher 1 à x
- Prendre le carré de ce résultat
- Retrancher 3 à ce résultat

Exemple :

f(-2) = (-2 – 1)² – 3 = (-3)² + 3 = 9 – 3 = 6 : L'image de -2 par la fonction f est 6.
f(-1) = (-1 – 1)² – 3 = (-2)² + 3 = 4 – 3 = 1 : L'image de -1 par la fonction f est 1.
f(0) = (0 – 1)² – 3 = (-1)² – 3 = 1 – 3 = -2 : L'image de 0 par la fonction f est -2.
f(1) = (1 – 1)² – 3 = 0 – 3 = -3 : L'image de 1 par la fonction f est -3.
f(2) = (2 – 1)² – 3 = 1² – 3 = 1 – 3 = -2 : L'image de 2 par la fonction f est -2.

On peut dresser un tableau des valeurs :

x	-2	-1	0	1	2
f(x)	6	1	-2	-3	-2

Remarque :

- chaque nombre de l'ensemble de définition a une image et une seule.
- certaines images peuvent avoir plusieurs antécédents.
- si un nombre n'a pas d'image, c'est qu'il n'appartient pas à l'ensemble de définition de la fonction.

III. REPRESENTATION GRAPHIQUE D'UNE FONCTION

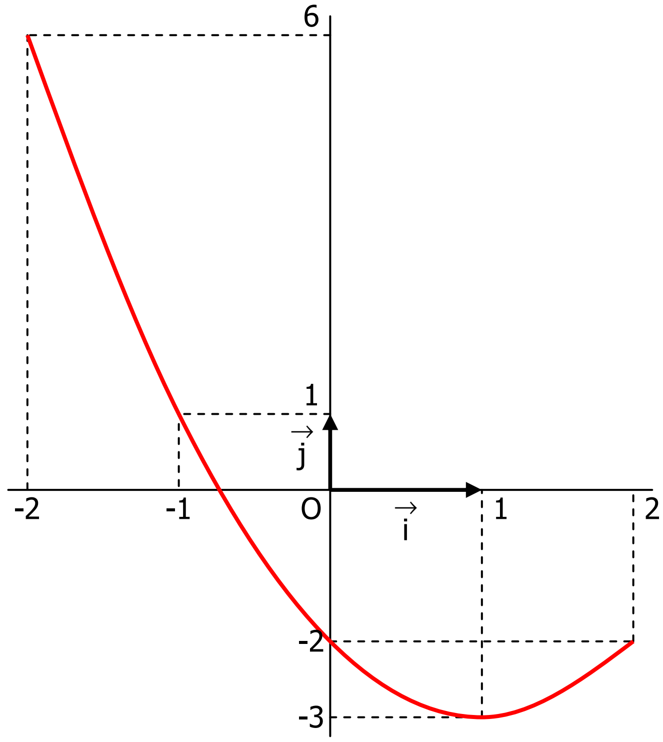
a. Définition

On considère le repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$). On appelle **représentation graphique de la fonction** f l'ensemble des points de coordonnées (x ; f(x)) où x appartient à l'ensemble de définition D.

Exemple :

On va représenter sur l'intervalle [-2 ; 2] la fonction définie par f : $x \longmapsto (x-1)^2 - 3$
On va utiliser le un tableau des valeurs :

Abscisses	x	-2	-1	0	1	2
Ordonnées	f(x)	6	1	-2	-3	-2



Remarque :

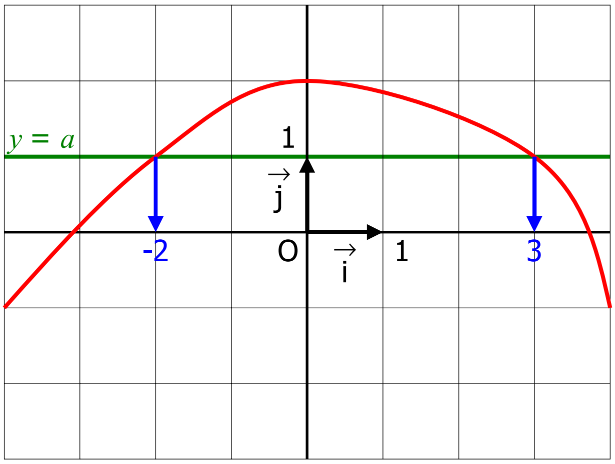
Puisque chaque nombre de l'ensemble de définition a une image et une seule, alors toute droite « verticale » a un point d'intersection et un seul avec la courbe de la fonction.
On parle de la « courbe d'équation $y = (x-1)^2 - 3$ »

IV. RESOLUTIONS GRAPHIQUES

a. Equation/inéquation du type f(x) = b ou f(x) > b (Exemple)

On a représenté la courbe C_f représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle [-4 ; 4].

Résolution d'une équation

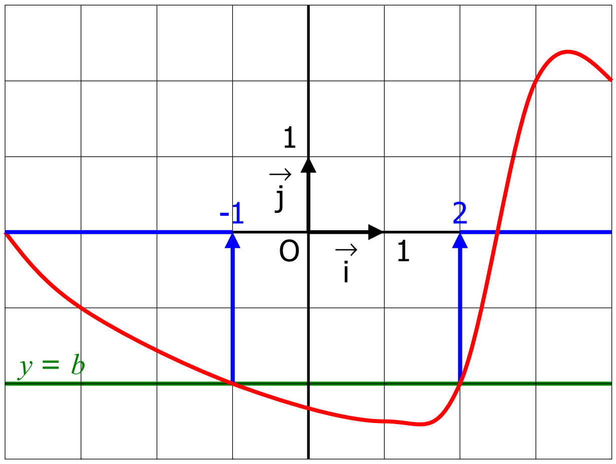


Résoudre l'équation f(x) = a revient à chercher les nombres qui ont pour image a.

Graphiquement, cela revient à chercher l'abscisse des points d'intersection de la courbe avec la droite d'équation $y = a$.

S = {-2 ; 3}

Résolution d'une inéquation



Résoudre l'inéquation f(x) > b revient à chercher les nombres qui ont une image supérieure à b.

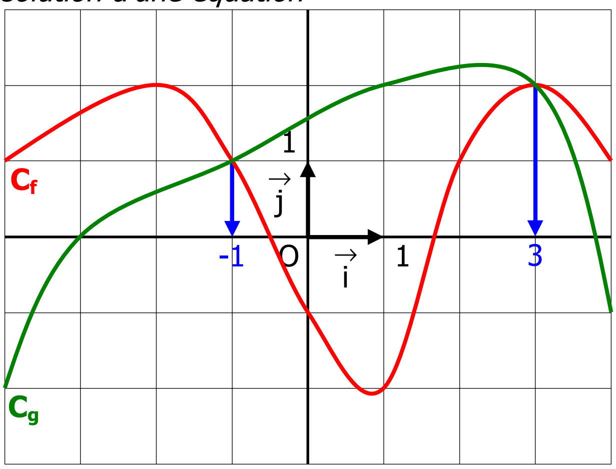
Graphiquement, cela revient à chercher l'abscisse des points de la courbe situés « au dessus » de la droite d'équation $y = b$.

S = [-4 ; -1[∪]2 ; 4]

b. Equation/inéquation du type f(x) = g(x) ou f(x) > g(x) (Exemple)

On a représenté les courbe C_f et C_g représentant eux fonctions f et g définies sur l'intervalle [-4 ; 4].

Résolution d'une équation

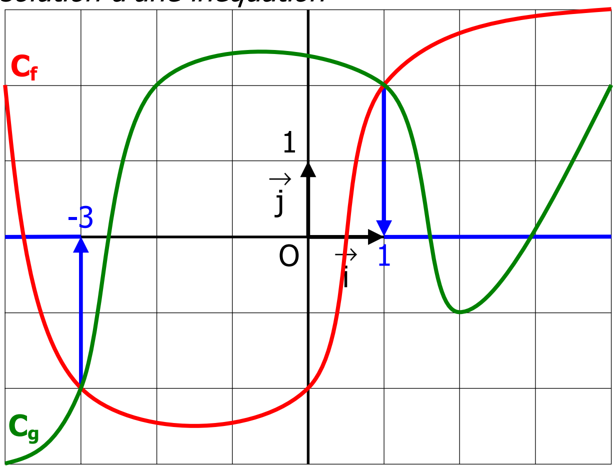


Résoudre l'équation f(x) = g(x) revient à chercher les nombres qui ont la même image par f et par g.

Graphiquement, cela revient à chercher l'abscisse des points d'intersection de la courbe C_f coupe la courbe C_g.

S = {-1 ; 3}

Résolution d'une inéquation



Résoudre l'inéquation f(x) > g(x) revient à chercher les nombres dont l'image par f est supérieure à l'image par g.

Graphiquement, cela revient à chercher l'abscisse des points pour lesquels de la courbe C_f est au dessus la courbe C_g.

S = [-4 ; -3[∪]1 ; 4]

V. SENS DE VARIATION D'UNE FONCTION

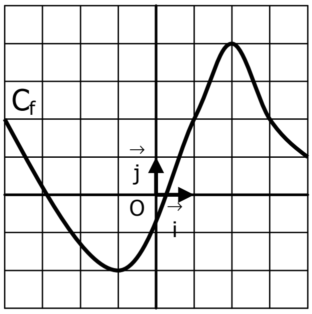
a. Point de vue graphique

Soif f une fonction définie sur un intervalle I.

f est **croissante** sur I si elle « **monte** » quand $x \in I$

f est **décroissante** sur I si elle « **descend** » quand $x \in I$

On récapitule alors cette étude dans un **tableau de variation**.



x	-4		-1		2		4
$f(x)$	2	↘	-2	↗	4	↘	1

b. Comparaison

Comparer deux nombres, c'est chercher lequel est le plus grand des deux (sauf s'ils sont égaux).

Règle : Comparer deux nombres équivaut à étudier le signe de leur différence

$$\mathbf{a < b \Leftrightarrow a - b < 0}$$
$$\mathbf{a > b \Leftrightarrow a - b > 0}$$
$$\mathbf{a = b \Leftrightarrow a - b = 0}$$

Exemple :

Comparer x^2 et $6x - 9$.

On calcule la différence : $x^2 - (6x - 9) = x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2 \geqslant 0$ (un carré est toujours $\geqslant 0$)

Donc pour toute valeur de x, on a $x^2 \geqslant 6x - 9$.

c. Définition mathématique

Soif f une fonction définie sur un intervalle I.

f est **croissante** sur I quand, pour tous réels a et b de I, f(a) et f(b) sont **dans le même ordre** que a et b.

f est **décroissante** sur I quand, pour tous réels a et b, f(a) et f(b) sont **dans l'ordre inverse** de a et b.

Technique :

1. On choisit a < b sur un intervalle I.
2. On étudie le signe de f(b) – f(a)
3. Si f(b) – f(a) est **positif**, alors f(a) < f(b) donc f **croissante** sur I
   Si f(b) – f(a) est **négatif**, alors f(a)> f(b) donc f **décroissante** sur I

Exemple :

On considère la fonction f : $x \longmapsto (x - 1)^2 - 3$

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= [(b - 1)^2 - 3] - [(a - 1)^2 - 3] \\ &= (b - 1)^2 - 3 - (a - 1)^2 + 3 \\ &= (b - 1)^2 - (a - 1)^2 \\ &= (b - 1 - a + 1)(b - 1 + a - 1) \\ &= (b - a)(b + a - 2) \end{aligned}$$

Soit a et b $\in\ ]-\infty\ ;\ 1]$ avec a< b. Dans ce cas $(b - a) > 0$ et $(b + a - 2) < 0$

Conclusion : Si a < b, alors f(a) > f(b) donc la fonction f est décroissante sur $]-\infty\ ;\ 1]$

Soit a et b $\in [1\ ;\ +\infty[$ avec a< b. Dans ce cas $(b - a) > 0$ et $(b + a - 2) > 0$

Conclusion : Si a < b, alors f(a) > f(b) donc la fonction f est décroissante sur $[1\ ;\ +\infty[$

d. Maximum et minimum

Soif f une fonction définie sur un intervalle I.

- s'il existe un nombre a tel que, pour tout x de I, f(a) ≥ f(x), on dit que f(a) est le **maximum** de f sur I
- s'il existe un nombre a tel que, pour tout x de I, f(a) ≤ f(x), on dit que f(a) est le **minimum** de f sur I

Exemple :

Pour la fonction f : $x \longmapsto (x-1)^2 - 3$, -3 est un minimum sur]-∞ ; +∞[