CONTENUS	CAPACITES ATTENDUES	COMMENTAIRES
Expressions algébriques Transformations d'expressions algébriques en vue d'une résolution de problème.	▪ Associer à un problème une expression algébrique. ▪ Identifier la forme la plus adéquate (développée, factorisée) d'une expression en vue de la résolution du problème donné. ▪ Développer, factoriser des expressions polynomiales simples ; transformer des expressions rationnelles simples.	Les activités de calcul nécessitent une certaine maîtrise technique et doivent être l'occasion de raisonner. Les élèves apprennent à développer des stratégies s'appuyant sur l'observation de courbes, l'anticipation et l'intelligence du calcul. Le cas échéant, cela s'accompagne d'une mobilisation éclairée et pertinente des logiciels de calcul formel.
Équations Résolution graphique et algébrique d'équations.	▪ Mettre un problème en équation. ▪ Encadrer une racine d'une équation grâce à un algorithme de dichotomie.	Pour un même problème, combiner résolution graphique et contrôle algébrique. Utiliser, en particulier, les représentations graphiques données sur écran par une calculatrice, un logiciel.
Inéquations Résolution graphique et algébrique d'inéquations.	▪ Modéliser un problème par une inéquation. ▪ Résoudre une inéquation à partir de l'étude du signe d'une expression produit de facteurs du premier degré. ▪ Résoudre algébriquement les inéquations nécessaires à la résolution d'un problème.	Pour un même problème, il s'agit de : ▪ combiner les apports de l'utilisation d'un graphique et d'une résolution algébrique, ▪ mettre en relief les limites de l'information donnée par une représentation graphique. Les fonctions utilisables sont les fonctions polynômes de degré 2
Fonctions de référence Variations de la fonction carré. Fonctions polynômes de degré 2.	▪ Connaître les variations de la fonction carré. ▪ Représenter graphiquement la fonction carré. ▪ Connaître les variations des fonctions polynômes de degré 2 (monotonie, extremum) et la propriété de symétrie de leurs courbes.	En particulier, faire remarquer que la fonction carré n'est pas linéaire. Les résultats concernant les variations des fonctions polynômes de degré 2 (monotonie, extremum) et la propriété de symétrie de leurs courbes sont donnés en classe et connus des élèves, mais peuvent être partiellement ou totalement admis. Savoir mettre sous forme canonique un polynôme de degré 2 n'est pas un attendu du programme

I. EXPRESSIONS ALGEBRIQUES

Dans une expression algébrique, certains nombres sont représentés par des lettres. On ne peut donc pas les calculer. Mais on peut les transformer (réduire, développer, factoriser) pour mieux les exploiter.

a. Distributivité

Pour tous nombres k, a et b, on a :

→ **Développer** →

$$k(a+b) = ka + kb$$

← **Factoriser** ←

Exemples :

$5(2x + 3) = 10x + 15$ $\quad$ $3x(1 - 2x) = 3x - 6x^2$ $\quad$ $2x^2(7x + 3) = 14x^3 + 6x^2$

b. Double distributivité

Pour tous nombres a, b, c et d on a :

→ **Développer** →

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

← **Factoriser** ←

Exemple :

$f(x) = (4x - 3)(2x + 5)$

$f(x) = 8x^2 + 20x - 6x - 15$

$f(x) = 8x^2 + 14x - 15$

c. Identités remarquables

Pour tous nombres a et b on a :

→ Développer →

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

← Factoriser ←

d. Polynôme du second degré

On appelle **polynôme du second degré** toute expression de la forme $ax^2 + bx + c$ avec a, b et c sont des nombres réelles, et $a \neq 0$.

Exemples :

$A(x) = x^2 + 8x - 9$ et $B(x) = -x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{3}{7}$ sont des polynôme du second degré.

Le polynôme $A(x)$ peut s'écrire sous plusieurs formes :
- Forme développée : $A(x) = x^2 + 8x - 9$
- Forme factorisée : $A(x) = (x-1)(x+9)$
- Forme **canonique** : $A(x) = (x+4)^2 - 25$

On appelle forme canonique d'un polynôme du second degré toute écriture où la variable x n'apparaît qu'une seule fois.

Exemple :

On veut mettre sous forme canonique $A(x) = x^2 + 8x - 9$.

$A(x) = x^2 + 8x - 9$

$A(x) = x^2 + 2 \times 4 \times x - 9$ (1) On fait apparaître une expression du type « $a^2 \pm 2ab$… »

$A(x) = x^2 + 2 \times 4 \times x + 4^2 - 4^2 - 9$ (2) On rajoute/enlève un « $+ b^2$ » pour pouvoir factoriser.

$A(x) = x^2 + 2 \times 4x + 4^2 - 16 - 9$ (3) On reconnaît une identité remarquable que l'on va factoriser.

$\boxed{A(x) = (x+4)^2 - 25}$ (4) On obtient $A(x)$ sous forme canonique.

Remarque :

Tout polynôme peut être mis sous forme développée ou canonique. Mais tous ne sont pas factorisables (en l'état actuel de nos connaissances…).

II. EQUATIONS ET INEQUATIONS PRODUIT

a. Equations du type (ax +b)(cx + d) = 0

Théorème :

Un produit $A \times B$ est nul **si et seulement si** $A = 0$ ou $B = 0$

Autre formulation : $A \times B = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ \text{ou} \\ B = 0 \end{cases}$

Exemple :

$$(x+3)(x-5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3 = 0 \\ \text{ou} \\ x - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ \text{ou} \\ x = -5 \end{cases}$$

b. Equations du type $x^2 = a$

Théorème :

Soit $a > 0$; l'équation « $x^2 = a$ » admet exactement deux solutions, $\sqrt{a}$ et - $\sqrt{a}$

Démonstration :

$$x^2 = a \Leftrightarrow x^2 - a = 0 \Leftrightarrow x^2 - \sqrt{a}^2 = 0 \Leftrightarrow (x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a}) \Leftrightarrow \begin{cases} x - \sqrt{a} = 0 \\ \text{ou} \\ x + \sqrt{a} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{a} \\ \text{ou} \\ x = -\sqrt{a} \end{cases}$$

Exemple :

$x^2 = 3$ équivaut à $\begin{cases} x = \sqrt{3} \\ \text{ou} \\ x = -\sqrt{3} \end{cases}$

Attention : il ne faut pas confondre - $\sqrt{3}$ (qui est l'opposé de $\sqrt{3}$) et $\sqrt{\mathbf{-3}}$ qui n'existe pas !

Remarques :

- Si $a = 0$, l'équation « $x^2 = a$ » équivaut à « $x = 0$ ».
- Si $a < 0$, l'équation « $x^2 = a$ » n'a aucune solution dans $\mathbb{R}$.

c. Signe d'un produit

Le signe d'un produit est déterminé par le nombre de facteurs négatifs.
- Si ce nombre est pair, alors le produit est positif.
- Si ce nombre est impair, alors le produit est négatif.

Exemple :

Etude du signe de A = $(3x - 2)(-4x - 7)$ à l'aide d'un tableau de signe :

x		$-\frac{7}{4}$		$\frac{2}{3}$	
$3x - 2$	+	0	−		−
$-4x - 7$	−		−	0	+
$(3x - 2)(-4x - 7)$	−	0	+	0	−

Conclusion :

A est positif quand $x \in [-\frac{7}{4} ; \frac{2}{3}]$

A est négatif quand $x \in]-\infty ; -\frac{7}{4}] \cup [\frac{2}{3} ; +\infty[$

« $\cup$ » signifie « Union » ou « réunion » de deux intervalles.

d. Inéquation produit

Pour résoudre ces inéquations en procédant de la façon suivante :
1. On se ramène à une inéquation dont le second membre est nul.
2. On factorise l'autre membre.
3. On dresse un tableau de signe.
4. On en déduit l'ensemble des solutions de l'inéquation.

Exemple :

La solution de l'inéquation $(3x - 2)(-4x - 7) > 0$ est l'intervalle $]-\frac{7}{4} ; \frac{2}{3}[$

III. FONCTION CARRE

Tout nombre réel a un carré.
On appelle **fonction carré** la fonction $f : x \longmapsto x^2$ définie sur]-∞ ; +∞[.

a. Sens de variation de la fonction

Théorème :
La fonction $f : x \longmapsto x^2$ est croissante sur [0; +∞[
La fonction $f : x \longmapsto x^2$ est décroissante sur]-∞ ; 0]

Démonstration 1 :
Soit a et b positifs tels que $a < b$
Si on multiplie par a positif : $a^2 < ab$. Et si on multiplie par b positif : $ab < b^2$. donc :
$$a^2 < ab < b^2$$
Donc f est croissante sur [0; +∞[

Soit a et b négatifs tels que $a < b$
Si on multiplie par a négatif : $a^2 > ab$. Et si on multiplie par b négatif : $ab > b^2$. donc :
$$a^2 > ab > b^2$$
Donc f est croissante sur]-∞ ; 0[

ou

Démonstration 2 :
Soit a et b réels tels que $a < b$.
Etudions le signe de $f(b) - f(a) = b^2 - a^2 = (b - a)(b + a)$

Dans tous les cas $b - a > 0$ car $a < b$.

Si a et b sont positifs alors $b + a > 0$
donc $(b - a)(b + a) > 0$
donc f est croissante sur [0; +∞[

Si a et b sont négatifs alors $b + a < 0$
donc $(b - a)(b + a) < 0$
donc f est décroissante sur]-∞ ; 0[

Conclusion :

x	-∞		0		+∞
f		↘	0	↗	

b. Courbe représentative

D'après le tableau de variation, la courbe représentatif de la fonction $f : x \longmapsto x^2$ admet pour minimum 0 quand x vaut 0.

Pour tout x, $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$
On dit alors que cette fonction est **paire**, ce qui signifie qu'un nombre et son opposé ont toujours la même image.

Graphiquement, cela signifie que pour toute valeur de x, les points de la courbe M(x ; $f(x)$) et M'($-x$; $f(-x)$) ont la même ordonnée, et sont donc symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

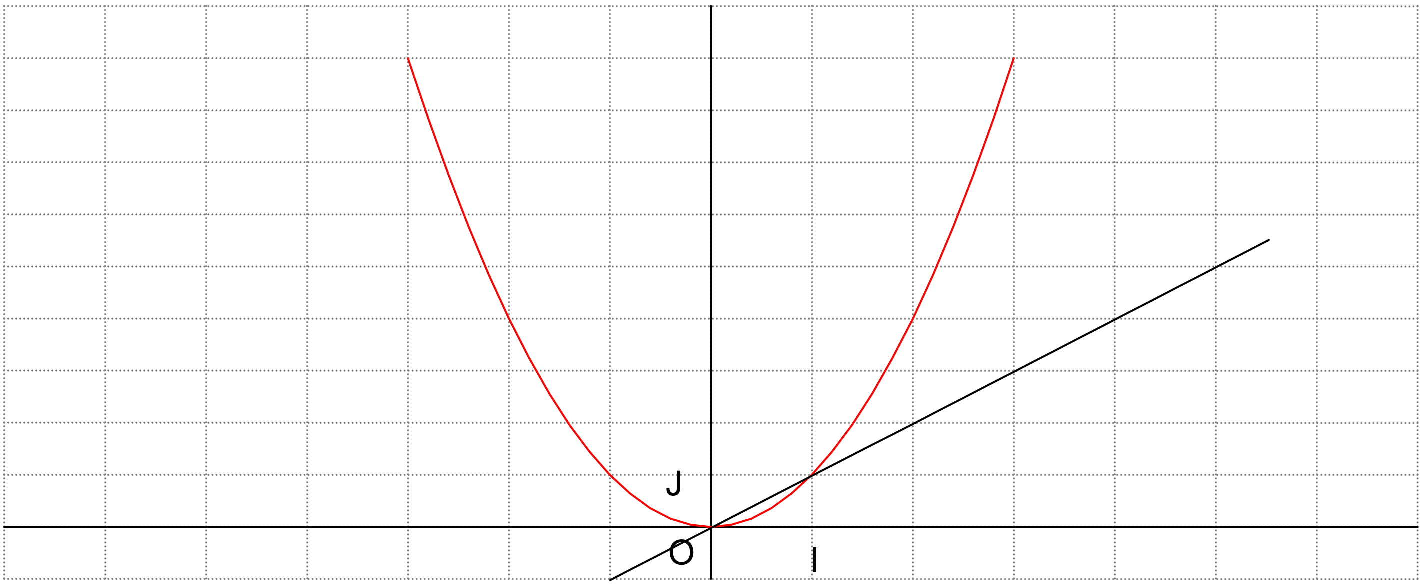
Pour construire la courbe, on va choisir quelques valeurs positives de x, puis on complétera le tracé par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées :

x	0	1	2	3
$f(x)$	0	1	4	9

Remarque :

$\frac{1}{1} \neq \frac{2}{4}$: la fonction carré <u>n'est pas linéaire</u>.

$\frac{4-1}{2-1} \neq \frac{9-4}{3-2}$: l'accroissement n'est pas linéaire, donc la fonction carré <u>n'est pas affine</u>.



Cette courbe s'appelle une **parabole**.

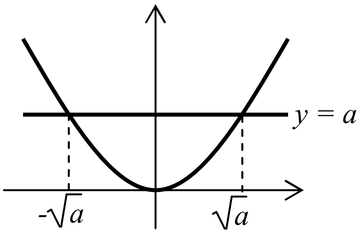
Remarques :

Si $0 < x < 1$, on a $x^2 < x$: la courbe est au dessous de la droite $y = x$

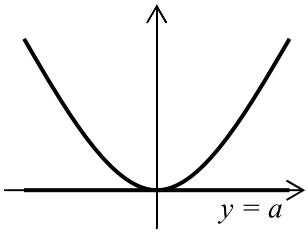
Si $x > 1$, on a $x^2 > x$: la courbe est au dessus de la droite $y = x$

Toute équation du type « $x^2 = a$ » admet :

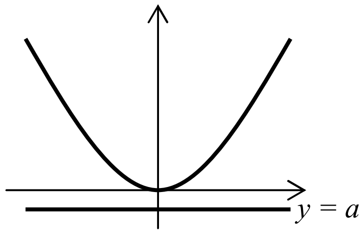
- Si $a > 0$, deux solutions $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$
- Si $a = 0$, une solution unique : 0
- Si $a < 0$, aucune solution



2 solutions



1 seule solution



Pas de solution

IV. FONCTION POLYNOME DU SECOND DEGRE

a. Définition

On appelle **fonction du second degré** toute fonction définie sur]-∞ ; +∞[par :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

avec a, b et c sont des nombres réelles, et $a \neq 0$.

On a vu qu'une telle fonction peut être écrite sous la forme canonique $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$

b. Sens de variation

On admettra que le sens de variation d'une fonction du second degré dépend du signe de a.

Si $a > 0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
f		$\searrow$	β	$\nearrow$	

Si $a > 0$, f admet un **minimum** quand $x = \alpha$

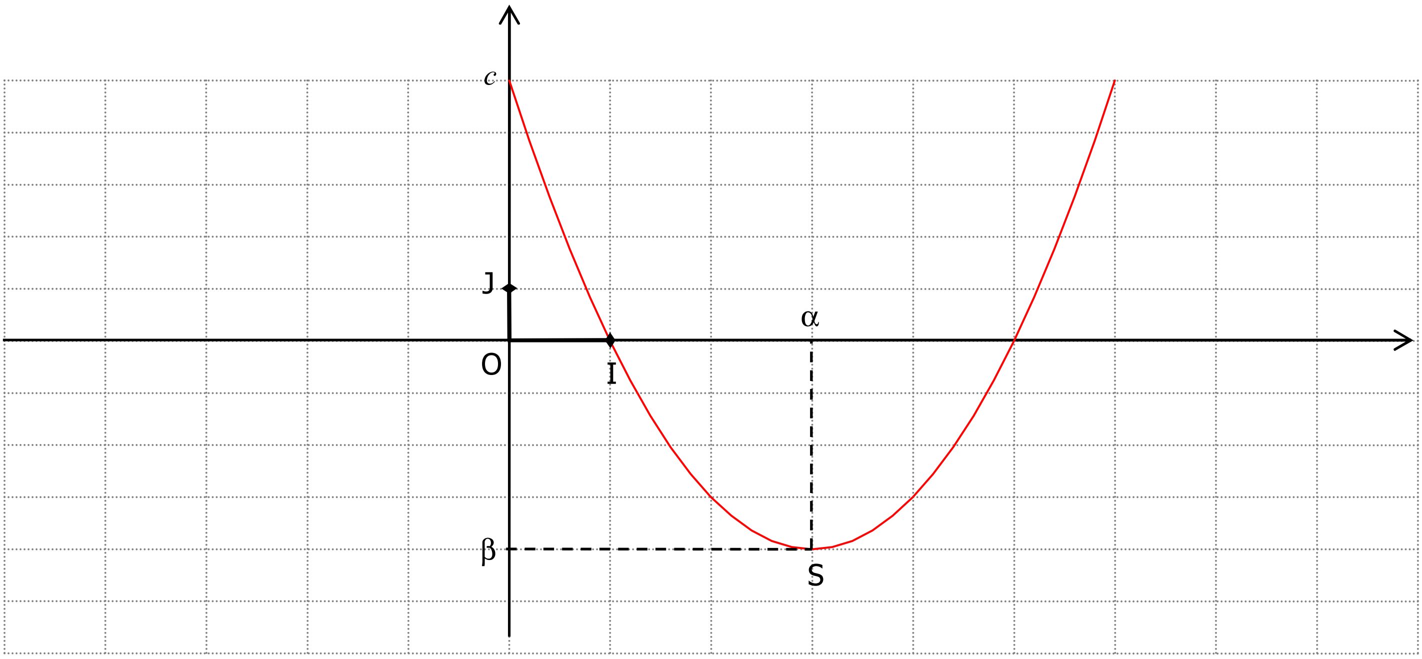
Si $a < 0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
f		$\nearrow$	β	$\searrow$	

Si $a < 0$, f admet un **maximum** quand $x = \alpha$

c. Courbe représentative

La courbe ($\mathscr{C}$) représentant une fonction du type du $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2 + \beta$ est une parabole de sommet S(α ; β)
Si $a > 0$, la parabole est dans le même sens que la fonction carré.
Si $a < 0$, la parabole est « retournée »



Remarques :
- Cette fonction n'est pas paire, mais elle admet pour axe de symétrie la droite parallèle à (OJ) passant par S.
- Le point d'intersection de ($\mathscr{C}$) avec (OJ) est le point C de coordonnées (0 ; c)
- Les points d'intersections éventuels de ($\mathscr{C}$) avec (OI) sont les points A(x_1 ; 0) et B(x_2 ; 0) où x_1 et x_2 sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$ (que l'on résout en factorisant $f(x)$)