CONTENUS	CAPACITES ATTENDUES	COMMENTAIRES
Fonctions de référence Variations de la fonction inverse.	▪ Connaître les variations de la fonction inverse. ▪ Représenter graphiquement la fonction inverse.	En particulier, faire remarquer que la fonction inverse n'est pas linéaire.
Études de fonctions Fonctions homographiques.	▪ Identifier l'ensemble de définition d'une fonction homographique.	Hormis le cas de la fonction inverse, la connaissance générale des variations d'une fonction homographique et sa mise sous forme réduite ne sont pas des attendus du programme.
Inéquations Résolution graphique et algébrique d'inéquations.	▪ Modéliser un problème par une inéquation. ▪ Résoudre graphiquement des inéquations de la forme : f (x) < k ; f (x) < g(x). ▪ Résoudre une inéquation à partir de l'étude du signe d'une expression produit ou quotient de facteurs du premier degré. ▪ Résoudre algébriquement les inéquations nécessaires à la résolution d'un problème.	Pour un même problème, il s'agit de : ▪ combiner les apports de l'utilisation d'un graphique et d'une résolution algébrique, ▪ mettre en relief les limites de l'information donnée par une représentation graphique. Les fonctions utilisables sont les fonctions homographiques

I. VALEURS INTERDITES - ENSEMBLE DE DEFINITION

Quand un nombre n'a pas d'image par une fonction, on dit que c'est une valeur interdite de la fonction.
L'ensemble de toutes les valeurs non interdites est appelé **ensemble de définition**.

Exemple :

On considère la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x}$

On sait que $\sqrt{x}$ n'existe pas quand $x \in\ ]-\infty\ ;\ 0[$. L'ensemble de définition de f est donc $[0\ ;\ +\infty[$

II. EQUATIONS ET INEQUATIONS QUOTIENTS

a. Equation quotient

Un quotient est nul si et seulement si son numérateur est nul ET son dénominateur ne l'est pas, c'est-à-dire :

$$\boxed{\frac{A}{B} = 0 \Leftrightarrow A = 0 \text{ et } B \neq 0}$$

*Les valeurs qui annulent le dénominateur sont appelées **valeurs interdites** et doivent être éliminées avant tout calcul.*

Exemple : $\dfrac{2x+8}{5-2x} = 3\ ,\ x \neq \dfrac{5}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{2x+8}{5-2x} - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x+8}{5-2x} - \frac{3(5-2x)}{5-2x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x+8-15+6x}{5-2x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{8x-7}{5-2x} = 0$$

$$\Leftrightarrow 8x - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \boxed{\frac{7}{8}} \neq \frac{5}{2} \qquad \text{donc } S = \left\{\frac{7}{8}\right\}$$

b. Inéquation quotient

Le signe d'un quotient, quand il existe, ne dépend que du nombre de ses facteurs négatifs (comme pour un produit).

Exemple :

Résoudre $\dfrac{3x-2}{-4x-7} \geq 0$

x		$-\frac{7}{4}$		$\frac{2}{3}$	
$3x-2$	$+$	0	$-$		$-$
$-4x-7$	$-$		$-$	0	$+$
$(3x-2)(-4x-7)$	$-$	‖	$+$	0	$-$

$$S = \left]-\frac{7}{4}\,;\,\frac{2}{3}\right]$$

<u>III. FONCTION INVERSE</u>

Tout nombre réel <u>non nul</u> a un inverse.

On appelle **fonction inverse** la fonction $f : x \longmapsto \frac{1}{x}$ définie sur $]-\infty\,;\,0[\ \cup\ ]0\,;\,+\infty[$.

<u>a. Sens de variation de la fonction</u>

Théorème :

La fonction $f : x \longmapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $]0; +\infty[$

La fonction $f : x \longmapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $]-\infty\,;\,0[$

Démonstration :

Soit a et b non nuls tels que $a < b$

Pour comparer $f(a)$ et $f(b)$, on va étudier le signe de $f(b) - f(a)$: $f(b) - f(a) = \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a}{ab} - \frac{b}{ab} = \boxed{\frac{a-b}{ab}}$

Si a et b sont strictement positifs avec $a < b$:
- $a - b < 0$
- *$ab > 0$ (produit de deux **positifs** donc **positif**)*

*Alors $f(b) - f(a) < 0$ donc f est **décroissante** sur $]0; +\infty[$*

Si a et b sont strictement négatifs avec $a < b$:
- $a - b < 0$
- *$ab > 0$ (produit de deux **négatifs** donc **positif**)*

*Alors $f(b) - f(a) < 0$ donc f est **décroissante** sur $]-\infty\,;\,0[$*

Conclusion :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		↘	‖	↘	

<u>b. Courbe représentative</u>

Pour tout x, $f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x)$

On dit alors que cette fonction est **impaire**, ce qui signifie qu'un nombre et son opposé ont des images opposées.

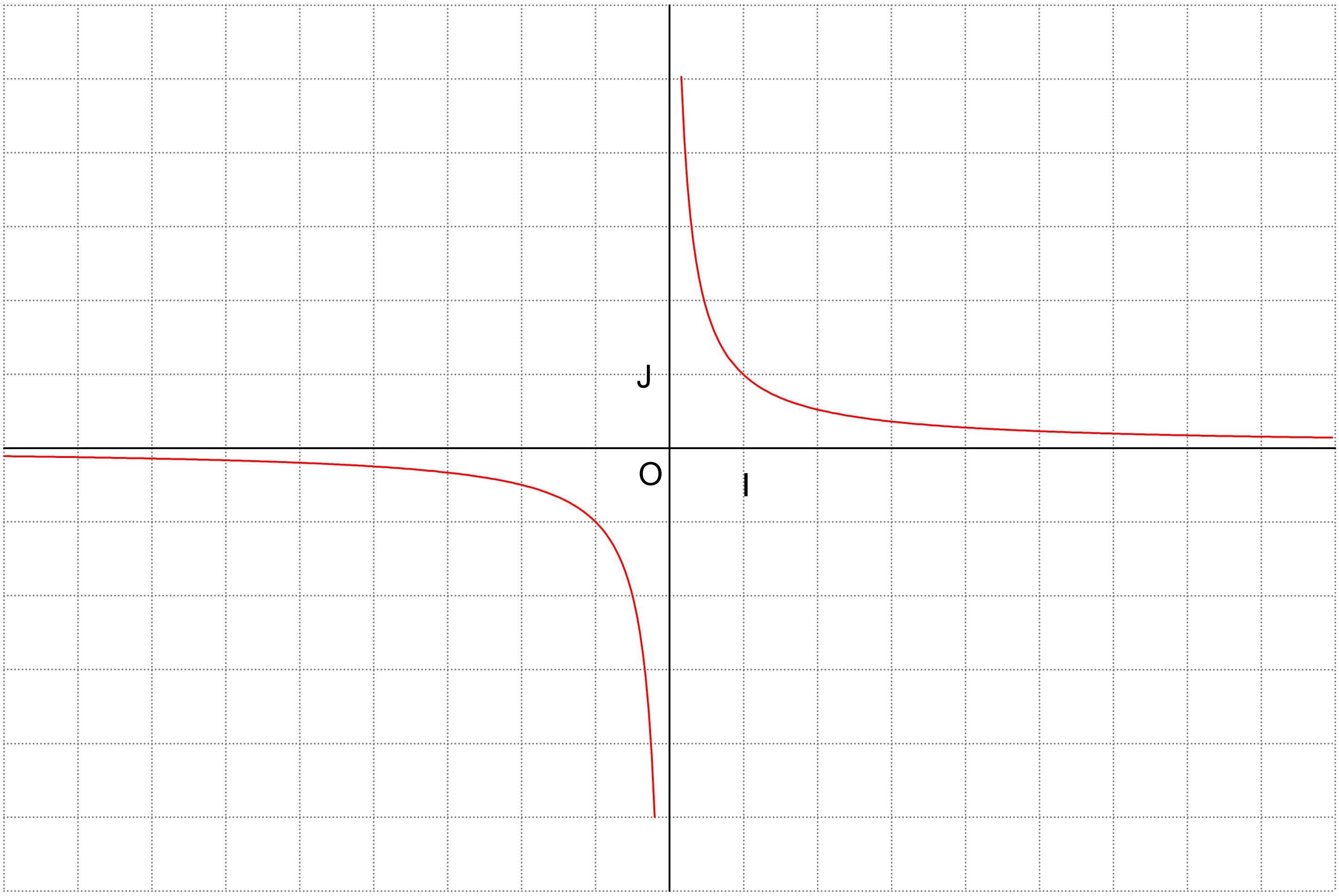
Graphiquement, cela signifie que pour toute valeur de x, les points de la courbe M(x ; $\boldsymbol{f(x)}$) et M'($-x$; $\boldsymbol{f(-x)}$) ont une ordonnée opposée, et sont donc symétriques par rapport à l'origine.

Pour construire la courbe, on va choisir quelques valeurs positives de x, puis on complétera le tracé par symétrie par rapport à O :

x	0,25	0,5	1	2	4
$f(x)$	4	2	1	0,5	0,25

$\frac{0{,}25}{4} \neq \frac{0{,}5}{2}$: la fonction inverse <u>n'est pas linéaire</u>.

$\frac{2-4}{0{,}5-0{,}25} \neq \frac{1-2}{1-0{,}5}$: l'accroissement n'est pas linéaire, donc la fonction inverse <u>n'est pas affine</u>.



Cette courbe s'appelle une **hyperbole**.

IV. FONCTION HOMOGRAPHIQUE

On appelle fonction homographique toute fonction sous la forme $\dfrac{ax+b}{cx+d}$

a. Ensemble de définition

Toute fonction de ce type admet une unique valeur interdite $x = \dfrac{-d}{c}$

Exemple :

(...)

b. Décomposition en éléments simples

Propriété :

Toute fonction homographique peut s'écrire sous la forme décomposée en élément simple $\alpha + \dfrac{\beta}{x - \gamma}$

Exemple :

(...)

Remarques :

- La fonction est définie sur $]-\infty\ ;\ \gamma[\cup]\gamma\ ;\ +\infty[$
- La courbe admet pour centre de symétrie le point $\Omega\ (\alpha\ ;\ \gamma)$
- Une telle fonction n'admet ni minimum, ni maximum
- Les droites d'équation $x = \alpha$ et $y = \gamma$ sont des asymptotes de la courbe.