Voici la marche à suivre pour étudier une fonction f définie sur un intervalle [a ; b]. Le but ultime de cette étude est le tracé de la courbe $\mathcal{C}$ représentant f, avec un maximum de renseignements.

1. Calcul de la dérivée de f

- En essayant de la mettre sous forme factorisée, ou sous la forme $\frac{P(x)}{Q(x)}$ où P et Q sont factorisés.
- On évitera de développer, en particulier les dénominateurs, surtout si ce sont des « carrés ».

2. Etude du signe de f'

- Si f est sous la forme ax + b → Petit tableau de signe.
- Si f est sous la forme ax^2 + bx + c → calcul du discriminant Δ et interprétation.
- Si f est un quotient, on étudie le signe du numérateur et du dénominateur. En particulier, on se souviendra que si l'un des deux est un carré, il est <u>toujours positif</u>.
- Si f contient des fonctions cos et/ou sin, on sera ramené à la résolution d'inéquations trigonométriques (le cercle peut être très utile) où l'on oubliera pas que cos x et sin x sont toujours compris entre -1 et 1.

3. Tableau de variation de f

- On traduit l'étude du signe de la dérivée : $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ croissante et $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ décroissante.
- Quand $f'(x) = 0$, cela signifie que $\mathcal{C}$ admet une tangente horizontale (maximum, minimum ou point d'inflexion).
- Ne pas oublier de calculer les valeurs de f aux points remarquables (bornes de l'ensemble de définition, maximum…)

4. Recherche des points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ avec les axes (Ox) et (Oy)

- Intersection de $\mathcal{C}$ avec (Ox) : On cherche le(les) nombres x_0 tel que $f(x_0) = 0$
  → $\mathcal{C}$ coupe (Ox) au(x) point(s) de coordonnées (x_0 ; 0)
- Intersection de $\mathcal{C}$ avec (Oy) : On calcule f(0)
  → $\mathcal{C}$ coupe (Oy) au point de coordonnées (0 ; f(0))

5. Tangentes à la courbe aux points remarquables

- On connaît déjà les tangentes horizontales (voir **2.** et **3.**)
- On détermine la (les) tangente(s) au(x) point(s) d'intersection avec les axes, déterminé(s) dans le **4.** en utilisant la formule :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

6. Construction de la courbe

- Tracer les deux axes, en respectant bien l'échelle donnée dans l'énoncé, et en restreignant l'axe (Ox) à l'ensemble de définition de la fonction.
- Placer les points d'intersection avec les axes, les maximums, minimums, points d'inflexion.
- Construire les tangentes (inutile de tracer « entièrement » la droite, se contenter du petit morceau autour du point de tangence).
- Construire la courbe en lissant autant que possible, et évitant les points anguleux.

Exemple :
Soit f définie sur [-2 ; 5] par :

$$f(x) = x^2 - 2x - 3$$

1. $f'(x) = 2x - 2$

2. Tableau de signe de f' :

x	-2		1		5
$f'(x)$		−	0	+	

3. Avant de faire le tableau, calculons :
f(-2) = 5 ; f(1) = -4 ; f(5) = 12

x	-2		1		5
$f(x)$	5	↘	-4	↗	12

Le minimum de f sur [-2 ; 5] est -4 et il st atteint pour x = 1.

4.
- Intersection avec (Ox) :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16 = 4^2$

$x_1 = \frac{-(-2) - 4}{2 \times 1} = \frac{2 - 4}{2} = \frac{-2}{2} = -1$

$x_2 = \frac{-(-2) + 4}{2 \times 1} = \frac{2 + 4}{2} = \frac{6}{2} = 3$

→ donc $\mathcal{C}$ coupe (Ox) aux points **A (-1 ; 0)** et **B (3 ; 0)**

- Intersection avec (Oy) : f(0) = -3

→ donc $\mathcal{C}$ coupe (Oy) au point de coordonnées **C (0 ; -3)**

5. En A : f'(-1) = -4 → $\boldsymbol{y = -4x - 4}$
En B : f'(3) = 4 → $\boldsymbol{y = 4x - 12}$
En C : f'(0) = -2 → $\boldsymbol{y = -2x - 3}$

6.