PROGRAMMES	COMMENTAIRES
Résolution de l'équation différentielle $y' = ay$ où a est un nombre réel : existence et unicité de la solution vérifiant une condition initiale donnée. Résolution de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ où ω est un nombre réel : existence et unicité (admises) de la solution vérifiant des conditions initiales données.	
TRAVAUX PRATIQUES	
Exemples simples d'étude de phénomènes continus satisfaisant à une loi d'évolution et à une condition initiale se ramenant à une équation du type $y' = ay$ ou $y'' + \omega^2 y = 0$	Certaines de ces situations seront issues de sciences physiques (mécanique du point, circuits électriques…). Lorsqu'une telle étude mène à une équation avec second membre, la méthode à suivre pour se ramener à l'équation sans second membre doit être indiquée. D'autre part, dans certaines sections, en liaison avec l'enseignement d'autres disciplines, on pourra être amené à étudier d'autres types d'équations différentielles mais ceci est en dehors du programme de mathématiques.

I. EQUATION DIFFERENTIELLE

Définition :

On appelle équation différentielle une équation dans laquelle l'inconnue (notée souvent y) et les coefficients sont des fonctions. y' est la dérivée de y, y'' est sa *dérivée seconde* (la « dérivée de la dérivée »).
Une équation différentielle est caractérisée par :

- Son ordre (1^{er} ou $2^{ème}$)
- Ses coefficients (constants ou pas)

Exemples :

- $y' + 3y = 0$ → 1^{er} ordre à coefficients constants
- $y'' - 7y' + 2y = \ln x$ → $2^{ème}$ ordre à coefficients constants
- $(x + 1)y' - 2y = 0$ → 1^{er} ordre à coefficients non constants

Résolution :

Résoudre une équation différentielle, c'est trouver toutes les fonctions qui vérifient cette équation. Dans le cas où toutes les solutions ont la même forme, on donne la forme générale de l'équation (qui dépendra donc d'un coefficient).

Exemple :

On considère l'équation différentielle (E) : $y' - 2y = 0$

→ Soit $f_1(x) = e^{2x}$
Alors $f_1'(x) = 2e^{2x}$
Et $y' - 2y = 2e^{2x} - 2e^{2x} = 0$: donc f_1 est une **solution particulière** de (E).

→ de même pour les fonctions $3e^{2x}$, $5e^{2x}$, $-15e^{2x}$, …

→ On dit que $f(x) = k.e^{x}$ est la **solution générale** de l'équation différentielle : $y' - 2y = 0$

II. EQUATION DIFFERENTIELLE DU TYPE « $y' = ay$ »

a. Solution générale :

La solution générale d'une équation différentielle du type « $y' = ay$ » où a est un réel quelconque est :

$$\boxed{y(x) = C.\,e^{ax} \text{ avec } C \in \mathbb{R}}$$

Exemple :

Soit (E) : $2y' + 6y = 0 \Leftrightarrow y' = \dfrac{6}{2}y \Leftrightarrow y' = 3y$

→ La solution générale de cette équation est la fonction $f(x) = C.e^{3x}$ avec $C \in \mathbb{R}$

b. Condition initiale

Il existe une unique solution f de $y' = ay$ vérifiant une condition initiale du type « $f(\alpha) = \beta$ »

Exemple :

Je cherche LA solution de (E) : $2y' + 6y = 0$ telle que $f(0) = 2$

Je sais que la solution générale de (E) est $f(x) = C.e^{3x}$ avec $C \in \mathbb{R}$

$f(0) = 2 \Leftrightarrow C.e^{3\times 0} = 2 \Leftrightarrow C.e^{0} = 2 \Leftrightarrow C = 2$

d'où $\boxed{f(x) = 2e^{3x}}$

III. EQUATION DIFFERENTIELLE DU TYPE « $y'' + \omega^2 y = 0$ »

a. Solution générale :

La solution générale d'une équation différentielle du type « $y'' + \omega^2 y = 0$ » où ω^2 est un réel positif quelconque est :

$$\boxed{y(x) = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x \text{ avec } C_1 \text{ et } C_2 \in \mathbb{R}}$$

Exemple :

Soit (E) : $y'' + 4y = 0 \Leftrightarrow y'' + 2^2\, y = 0 \Leftrightarrow$

→ La solution générale de cette équation est la fonction $f(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$ avec C_1 et $C_2 \in \mathbb{R}$

b. Condition initiale

Pour déterminer de façon unique une solution f de $y'' + \omega^2 y = 0$ il faut fixer **deux** conditions initiales.

Exemple :

Je cherche LA solution de (E) : $y'' + 4y = 0$ telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$

Je sais que la solution générale de (E) est $f(x) = f(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$ avec C_1 et $C_2 \in \mathbb{R}$

$f(0) = 1 \Leftrightarrow C_1 \cos 2\times 0 + C_2 \sin 2\times 0 = 1 \Leftrightarrow C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 = 1 \Leftrightarrow C_1 \times 1 + C_2 \times 0 = 1 \Leftrightarrow \boxed{C_1 = 1}$

$f'(x) = -2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x$

donc $f'(0) = 0 \Leftrightarrow -2C_1 \sin 0 + 2C_2 \cos 0 = 0 \Leftrightarrow -2C_1 \times 0 + 2C_2 \times 1 = 0 \Leftrightarrow 2C_2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{C_2 = 0}$

d'où $\boxed{f(x) = \cos 2x}$