EXERCICE 4A.1 - GMA 2007

On considère l'équation différentielle (E) : $4y'' + \pi^2 y = 0$, où y est une fonction numérique deux fois dérivable de la variable réelle x.

1. Résoudre l'équation (E).

2. Déterminer la fonction g, solution de cette équation, dont la courbe représentative dans un repère du plan passe par le point N de coordonnées A $\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et qui, en ce point, admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

3. Vérifier que, pour tout nombre réel x, $g(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{4}\right)$

4. Calculer la valeur moyenne de g sur l'intervalle [0 ; 1].

EXERCICE 4A.2 - GMA 2007

1. Résoudre l'équation différentielle (E) $y'' + 16y = 0$, y désignant une fonction numérique d'une variable réelle définie et deux fois dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

2. Déterminer la solution f de cette équation différentielle vérifiant $f(0) = \frac{1}{10}$ et $f'(0) = -\frac{2\sqrt{3}}{5}$

3. Démontrer que, pour tout nombre réel x, on a $f(x) = \frac{1}{5}\cos\left(4x + \frac{\pi}{3}\right)$

4. a. Résoudre, dans l'ensemble R des nombres réels, l'équation $f(x) = \frac{1}{5}$.

b. Déterminer les solutions de l'équation $f(x) = \frac{1}{5}$ qui appartiennent à l'intervalle $[0\,;\,2\pi[$. Représenter ces solutions sur un cercle trigonométrique.

EXERCICE 4A.3 - GMB 2007

1. Résoudre l'équation différentielle : $9y'' + y = 0$

2. Déterminer la solution f de cette équation différentielle vérifiant les conditions initiales : $\begin{cases} f(0) = \sqrt{3} \\ f'(0) = -\frac{1}{3} \end{cases}$

3. a. Montrer que, pour tout nombre réel x, on peut écrire : $f(x) = 2\cos\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{6}\right)$

b. Résoudre, dans l'ensemble des nombres réels, l'équation $f(x) = -\sqrt{2}$.

4. Calculer la valeur moyenne m de f sur l'intervalle $[0\,;\,\pi]$.

EXERCICE 4A.4 - GMB 2009

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J).

1. Résoudre l'équation différentielle (E) $4y'' + y = 0$, ou y désigne une fonction de la variable réelle x définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et ou y'' désigne sa dérivée seconde.

2. a. Le but de cette question est de trouver la solution particulière de (E), appelée f , sachant que la courbe $\mathcal{C}_f$ passe par le point A(0 ; 1) et admet en ce point une tangente de coefficient directeur $\frac{1}{2}$. En déduire les valeurs de $f(0)$ et $f'(0)$.

b. Montrer que la solution particulière f de l'équation (E) est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}$.

Soit D le domaine du plan délimité par l'axe des abscisses ; l'axe des ordonnées, la droite d'équation $x = \pi$ et la courbe $\mathcal{C}_f$.

3. Montrer que $[f(x)]^2 = 1 + \sin x$

4. On considère le solide de révolution engendré par la rotation du domaine D autour de l'axe des abscisses.

Calculer la valeur exacte, en unité de volume, du volume V de ce solide.

On rappelle que $V = \pi\int_0^{\pi}[f(x)]^2\,dx$