Les premiers éléments de l'étude des nombres complexes ont été mis en place en première. L'objectif est de compléter cet acquis pour fournir des outils utilisés en algèbre, en trigonométrie et en sciences physiques. Les élèves doivent connaître les notations $a + bi$ et $a + bj$ cette dernière étant utilisée en électricité. Le temps consacré à cette partie du programme doit être plus important dans les spécialités « génie électronique » et « génie électrotechnique » où une interprétation géométrique de quelques transformations complexes élémentaires est introduite en vue des applications en électronique.

PROGRAMMES	COMMENTAIRES
Module, module d'un produit, inégalité triangulaire. Argument d'un nombre complexe non nul, notation $re^{i\theta}$ Relation $e^{i\theta} e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$, lien avec les formules d'addition ; formule de Moivre. Formules d'Euler $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$; $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2}$	Les élèves doivent savoir interpréter géométriquement le module de b-a. Toute autre formulation de propriétés géométriques à l'aide de nombres complexes doit faire l'objet d'indications.
Interprétation géométrique de $z \longmapsto z + a$ et $z \longmapsto e^{i\theta} z$	Ceci n'est au programme que des spécialités « génie électronique » et « génie électrotechnique ».
TRAVAUX PRATIQUES	
Résolution des équations du second degré à coefficients réels.	La résolution d'équations à coefficients complexes et l'étude des racines n-ièmes de l'unité sont hors programme.
Exemples de mise en ouvre des formules de Moivre et d'Euler (linéarisation de polynômes trigonométriques...).	On se bornera à des exposants peu élevés ; les formules trigonométriques ainsi obtenues n'ont pas à être mémorisées de même que les formules de conversion de sommes en produits et de produits en sommes.

I. NOMBRES COMPLEXES

a. Forme algébrique d'un nombre complexe

On appelle **forme algébrique** d'un nombre complexe z la forme $z = a + bi$ où a et b sont deux nombres réels, et i est le nombre tel que $i^2 = -1$.

Le nombre a est appelé **partie réelle** de z, et noté Re(z)
Le nombre b est appelé **partie imaginaire** de z, et noté Im(z)

Exemple :
$z = 3 + 4i$ est un nombre complexe. Re(z) = 3 et Im(z) = 4

Remarques :
- La partie imaginaire d'un nombre complexe est un nombre réel.
- Si Im(z) = 0, alors z est un nombre réel.
- Si Re(z) = 0, z est un **imaginaire pur**.
- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

b. Formules

Soit $z = a + bi$ et $z' = a' + b'i$ deux nombres complexes.

$\boxed{z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}}$ $\boxed{z + z' = (a + a') + (b + b')i}$ $\boxed{z \times z' = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i}$

Exemples :
Soit $z = 4 + 3i$ et $z' = -2 + 5i$
$z + z' = (4 + 3i) + (-2 + 5i) = (4 - 2) + (3 + 5)i = 2 + 8i$
$z \times z' = (4 + 3i)(-2 + 5i) = 4 \times (-2) + 4 \times 5i + 3i \times (-2) + 3i \times 5i = -8 + 20i - 6i - 15 = -23 + 14i$

c. conjugué

Soit $z = a + bi$ un nombre complexe. On appelle **conjugué de** z le nombre $a - bi$ noté $\overline{z}$.

Exemple :
Le conjugué de $4 + 3i$ est $4 - 3i$.

d. Propriétés du conjugué :

$\boxed{\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}}$ $\boxed{\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}}$ $\boxed{z \times \overline{z} = a^2 + b^2}$

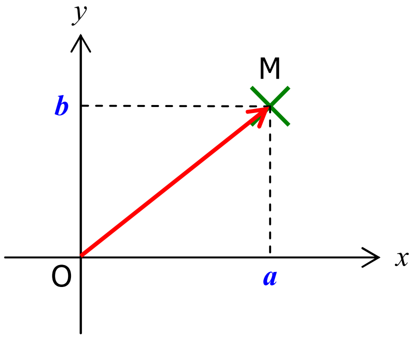
e. Inverse

Soit $z = a + bi$ un nombre complexe. L'inverse de z est le nombre :

$$\boxed{\frac{1}{z} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}i}$$

II. GEOMETRIE ET NOMBRES COMPLEXES

a. En notation algébrique :



Dans un repère **orthonormal**, on dit que :

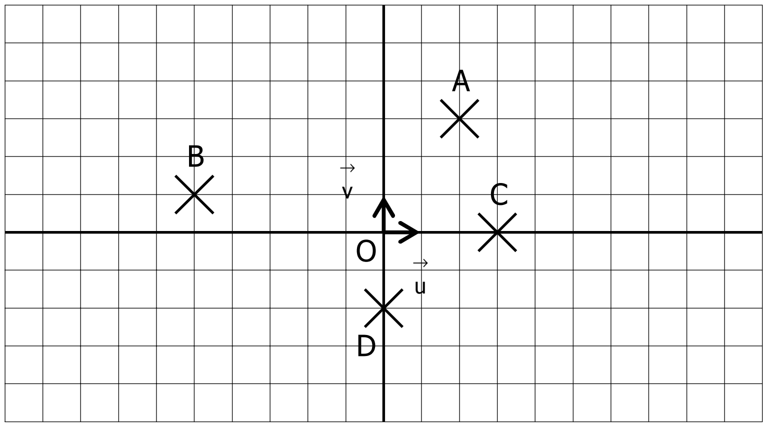
- le nombre $z = a + bi$ est **l'affixe** du point M(a ; b) ou du vecteur $\overrightarrow{OM}$.
- le point M est **l'image** du nombre $z = a + bi$.
- le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est **le vecteur image** du nombre $z = a + bi$.

$\boxed{a = \text{Re}(z) \text{ est l'}\textbf{abscisse}\text{ de M}}$ $\boxed{b = \text{Im}(z) \text{ est l'}\textbf{ordonnée}\text{ de M}}$

Exemple :

Placer dans le repère les points :

A $(2 + 3i)$
B $(-5 + i)$
C (3)
D $(-2i)$:

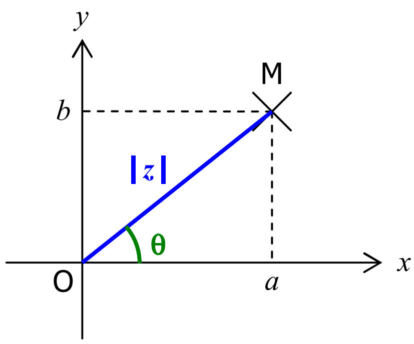


Remarques :

- pour éviter les confusions, le repère ne s'appellera plus $(O, \vec{i}, \vec{j})$ mais $(O, \vec{u}, \vec{v})$
- le plan muni de ce repère est appelé **plan complexe**.
- tout nombre réel aura son image sur l'axe des abscisses désormais appelé « **axe des réels** »
- tout nombre imaginaire pur aura son image sur l'axe des ordonnées désormais appelé « **axe des imaginaires** »

b. En notation trigonométrique

Soit M le point du plan complexe qui a pour affixe $z = a + bi$.



On appelle **module de z** et on note $|z|$ le nombre $|z| = OM = \rho$

On appelle **argument de z** (non nul) et on note **arg(z)** tout nombre de la forme $\theta + k2\pi$ où θ est une mesure de l'angle orienté $\widehat{xOM}$.

En première, on notait cette forme trigonométrique : $[\rho ; \theta]$

Propriété :

Soit A le point d'affixe z_A et B le point d'affixe z_B. Alors l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $z_B - z_A$ et $AB = |z_B - z_A|$

III. EQUATION DU SECOND DEGRE A INCONNUE COMPLEXE

Soit l'équation $az^2 + bz + c = 0$ (avec a, b, c réels, $a \neq 0$).

Le **discriminant** de cette équation est $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$

Si $\Delta > 0$, on a 2 solutions réelles : $\boxed{z_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}}$ et $\boxed{z_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}}$

Si $\Delta = 0$, on a 1 solution réelle : $\boxed{z = \dfrac{-b}{2a}}$

Si $\Delta < 0$, (et donc $-\Delta > 0$) on a 2 solutions complexes conjuguées: $\boxed{z_1 = \dfrac{-b + \sqrt{-\Delta}}{2a}}$ et $\boxed{z_2 = \dfrac{-b - \sqrt{-\Delta}}{2a}}$

Exemple :

On considère l'équation : $2z^2 + 3z + 4 = 0$

$\Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times 4 = 9 - 32 = -23 < 0$

L'équation admet deux solutions complexes : $z_1 = \dfrac{-3 - i\sqrt{23}}{4}$ et $z_2 = \dfrac{-3 + i\sqrt{23}}{4}$

On remarque qu'effectivement $\overline{z_1} = z_2$

IV. NOTATION EXPONENTIELLE

On appelle **notation exponentielle** de z la notation $\rho e^{i\theta}$ où : $\begin{cases} \rho \text{ est le module de } z \\ \theta \text{ est l'argument de } z \end{cases}$

Exemples :

La notation exponentielle de 1 est e^{i0} ; La notation exponentielle de i est $e^{i\pi/2}$

Remarque :

Pour tout θ réel on a $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

Formules de conversion :

Pour tout nombre complexe, on peut passer d'une forme à une autre en utilisant les formules :

$\boxed{|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \rho}$ $\boxed{\cos\theta = \dfrac{a}{|z|}}$ $\boxed{\sin\theta = \dfrac{b}{|z|}}$ $\boxed{a = \rho.\cos\theta}$ $\boxed{b = \rho.\sin\theta}$

Exemple 1 :

Soit z un nombre complexe dont la forme algébrique est $z = -1 + i\sqrt{3}$

$\rho = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4} = 2$

$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{-1}{|z|} = \dfrac{-1}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{|z|} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ et on reconnaît là des valeurs remarquables du sinus et du cosinus : $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$

La forme trigonométrique de z est donc $\mathbf{2\, e^{i2\pi/3}}$

Exemple 2 :

Soit z un nombre complexe dont la forme trigonométrique est $5\, e^{i\pi/6}$

$\begin{cases} a = \rho.\cos\theta = 5 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 5\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ b = \rho.\sin\theta = 5 \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{2} \end{cases}$ en utilisant les valeurs remarquables du sinus et du cosinus de $\theta = \dfrac{\pi}{6}$

La forme algébrique de z est donc $z = \mathbf{\dfrac{5\sqrt{3}}{2} + \dfrac{5}{2} i}$

V. UTILISATIONS DE LA NOTATION EXPONENTIELLE

a. Formules de calcul

La notation exponentielle z la notation $\rho e^{i\theta}$ obéit aux mêmes règles que les nombres réels, sur les produits et les puissances. En conséquence :

$\boxed{\rho e^{i\theta} \times \rho' e^{i\theta'} = \rho\rho' e^{i(\theta+\theta')}}$ donc $|zz'| = |z|\,|z'|$; $\arg(zz') = \arg z + \arg z'$

$\boxed{\dfrac{\rho e^{i\theta}}{\rho' e^{i\theta'}} = \dfrac{\rho}{\rho'} e^{i(\theta-\theta')}}$ donc $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$; $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z'$

$\boxed{(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}}$ donc $|z^n| = |z|^n$; $\arg(z^n) = n \arg z$

Exemples:

Remarque :
La notation exponentielle n'est **d'aucun intérêt** quand on ajoute/soustrait des nombres complexes.

b. Conséquences en trigonométrie (formules d'addition et de duplication)

On sait que : $z = e^{ia} \times e^{ib} = e^{i(a+b)}$
En notation algébrique : $z = (\cos a + i \sin a)(\cos b + i \sin b) = \cos(a+b) + i \sin(a+b)$
On développe : $z = \cos a \cos b + i \cos a \sin b + i \sin a \cos b - \sin a \sin b = \cos(a+b) + i \sin(a+b)$
On identifie les parties réelles et les parties imaginaires : $\mathrm{Re}(z) = \boxed{\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b}$

$\mathrm{Im}(z) = \boxed{\sin(a+b) = \cos a \sin b + \sin a \cos b}$

On pourrait de la même façon retrouver les formules de soustraction ou de duplication (formulaire).

Application : calcul de $\cos \dfrac{7\pi}{12}$ en remarquant que $\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{4}$

c. Formule de Moivre :

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$. On en déduit la formule de Moivre :

$$\boxed{(\cos\theta + i \sin\theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta}$$

Un exemple d'utilisation : Exprimer $\cos 3x$ et $\sin 3x$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$

On remarque que $\cos 3x = \mathrm{Re}(\cos 3x + i \sin 3x)$ et $\sin 3x = \mathrm{Im}(\cos 3x + i \sin 3x)$
Or, $\cos 3x + i \sin 3x = (\cos x + i \sin x)^3$
(IR 3ème degré) $= \cos^3 x + 3\cos^2 x\,(i \sin x) + 3 \cos x\,(i \sin x)^2 + (i)^3 \sin^3 x$
$= \cos^3 x + 3i \cos^2 x \sin x - 3 \cos x \sin^2 x - i \sin^3 x$
$= (\cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x) + i(3 \cos^2 x \sin x - \sin^3 x)$
donc **$\cos 3x = \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x$** et **$\sin 3x = 3 \cos^2 x \sin x - \sin^3 x$**

d. Formules d'Euler (linéarisations → voir TP)

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ on a les deux formules d'Euler :

$$\boxed{\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}} \qquad \boxed{\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}}$$

Un exemple d'utilisation : Linéariser $\cos 3x \sin 2x$

$\cos 3x = \dfrac{e^{i3x} + e^{-i3x}}{2} = (\ldots)$