Quelques notions de calcul des probabilités ont été introduites en première ; en terminale, on poursuit l'étude de phénomènes aléatoires. Le programme comporte une consolidation des acquis de première et l'introduction, sur des exemples simples, du concept de variable aléatoire. On se limite à des ensembles finis ; toute théorie formalisée est exclue et les notions de probabilité conditionnelle, d'indépendance et de probabilité produit ne sont pas au programme.

Pour les variables aléatoires, *le programme ne porte que sur l'étude d'exemples*.

PROGRAMMES	COMMENTAIRES
Variable aléatoire (réelle) prenant un nombre fini de valeurs et loi de probabilité associée ; fonction de répartition, espérance mathématique, variance, écart-type.	On prendra un point de vue très simple : certaines situations de probabilité s'expriment commodément par l'affectation de probabilités p_1, p_2, … , p_n aux valeurs x_1, x_2, … , x_n d'une grandeur numérique X associée à une expérience aléatoire ; on dit alors que X est une variable aléatoire. Les événements $(X=x_1)$, $(X=x_2)$, … , $(X=x_n)$ sont les événements élémentaires de la loi de probabilité de X. Pour la fonction de répartition, on emploiera la convention $F(x) = p(X \leq x)$
TRAVAUX PRATIQUES	
Exemples d'emploi de partitions et de représentations (arbres, tableaux…) pour organiser et dénombrer des données relatives à des situations aléatoires.	L'étude du dénombrement des permutations, arrangements et combinaisons est hors programme.
Exemples d'étude de situations de probabilités issues d'expériences aléatoires (modèles d'urnes, jeux…).	On conserve le même point de vue qu'en première ; en particulier, on s'attachera à étudier des situations permettant de bien saisir la démarche du calcul des probabilités, et non des exemples comportant des difficultés techniques de dénombrement.
Exemples simples d'étude de situations menant à l'étude d'une variable aléatoire	Des indications doivent être données sur la méthode à suivre.

I. VOCABULAIRE

a. Expérience aléatoire

C'est une expérience (ou épreuve) dont on connaît parfaitement les conditions de déroulement mais dont les résultats dépendent du hasard.

Exemple :

Lancer un dé à 6 faces non pipé constitue une expérience aléatoire.

b. Univers

C'est l'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire. On le note Ω

Exemple :

Ω = { ⚀ ; ⚁ ; ⚂ ; ⚃ ; ⚄ ; ⚅ }.

c. Evénement

C'est une partie de l'univers. (Si cette partie ne contient qu' seul élément, on parle d'**événement élémentaire**).

Exemple :

A = « J'obtiens un nombre pair » = { ⚁ ; ⚃ ; ⚅ }.

$\varnothing$ = événement **impossible**.

Ω = { ⚀ ; ⚁ ; ⚂ ; ⚃ ; ⚄ ; ⚅ } = événement **certain**.

d. Evénements incompatibles

Deux événements n'ayant aucun élément en commun sont dits **incompatibles** (ou **disjoints**).

Exemple :

A = « J'obtiens un nombre pair » et B = « J'obtiens un nombre impair » sont incompatibles.

e. Evénement contraire

Si A est un événement, on note $\overline{A}$ l'événement contraire de A formé de tous les éléments de Ω qui n'appartiennent pas à A.

Exemple : Si A = { ⚂ } alors $\overline{A}$ = { ⚀ ; ⚁ ; ⚃ ; ⚄ ; ⚅ }.

f. Intersection d'événements : « A et B »

Si A et B sont deux événements, on note $A \cap B$ (« A inter B ») l'ensemble de tous les éléments qui appartiennent à la fois à A **et** B.

Exemple :

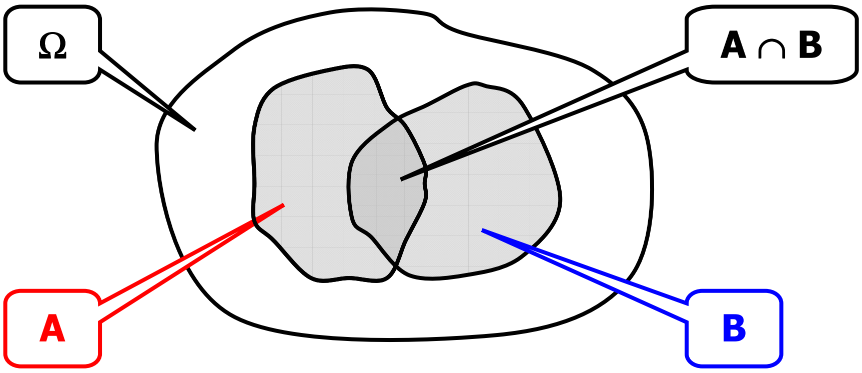
Si A = { ⚀ ; ⚁ ; ⚂ ; ⚃ } et B = { ⚂ ; ⚃ ; ⚄ ; ⚅ } alors $A \cap B$ = { ⚂ ; ⚃ }.

g. Union d'évenements : « A ou B »

Si A et B sont deux événements, on note $A \cup B$ (« A union B ») l'ensemble de tous les éléments qui appartiennent à A **ou** à B (ou aux deux à la fois).

Exemple :

Si A = { ⚁ ; ⚃ ; ⚅ } et B = { ⚃ ; ⚄ ; ⚅ } alors $A \cup B$ = { ⚁ ; ⚃ ; ⚄ ; ⚅ }.



II. PROBABILITES SUR LES ENSEMBLES FINIS

On ne s'intéresse ici qu'à des expériences ayant un <u>nombre fini de résultats possibles</u>. Donc Ω a aussi un nombre fini d'éléments (et à fortiori tous les événements, qui sont des parties de Ω). On peut donc les compter.

a. Probabilité

A chaque événement A on associe un **nombre** appelé **probabilité de A**, noté **P(A)** tel que :

$\boxed{0 \leq P(A) \leq 1}$ $\boxed{P(\Omega) = 1}$ $\boxed{P(\varnothing) = 0}$

b. Propriétés

Soit A et B deux événements : $\boxed{P(\overline{A}) = 1 - P(A)}$ $\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$

Remarque :

Si A et B sont incompatibles, alors $A \cap B = \varnothing$, donc $P(A \cap B) = 0$ et donc $\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$

Une formule utile :

$$\boxed{P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})}$$

III. EQUIPROBABILITE

On dit qu'il y a équiprobabilité si tous les événements élémentaires qui constituent l'univers ont la même probabilité. Dans ce cas, on a :

$$\boxed{P(A) = \frac{\text{nombre d'éléments de A}}{\text{nombre d'éléments de }\Omega}}$$

Exemple :

Si Ω = { ⚀ ; ⚁ ; ⚂ ; ⚃ ; ⚄ ; ⚅ }, alors P(⚀) = P(⚁) = P(⚂) = P(⚃) = P(⚄) = P(⚅) = $\frac{1}{6}$.

IV. VARIABLE ALEATOIRE

a. Définition :

On appelle variable aléatoire X toute fonction qui, à un événement donné, associe la valeur x_i.

$$X \left| \begin{array}{l} \Omega \text{ (évenements)} \longmapsto \mathbb{R} \text{ (nombres réels)} \\ \omega_i \longmapsto x_i \end{array} \right.$$

b. Loi de probabilité

La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est le tableau où x_1, x_2, … et x_n sont les différentes valeurs de X et p_1, p_2, … et p_n sont les probabilités associées à chaque valeur de X.

Valeurs de X	x_1	x_2	…	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	…	p_n

Exemple :

On lance deux pièces et on définit la variable aléatoire X par le nombre de « Face » obtenu.

$\Omega = \{PP ; PF ; FP ; FF\}$ donc
- PP : X = 0 et *1 chance sur 4*
- PF ou FP : X = 1 et *2 chances sur 4*
- FF : X = 2 et *1 chance sur 4*

La loi de probabilité de X est :

Valeurs de X	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

c. Fonction de répartition

C'est la loi associée aux probabilités cumulées donnée par le tableau :

Valeurs de X	x_1	x_2	…	x_n
$P(X \leq x_i)$	p_1	$p_1 + p_2$	…	$p_1 + p_2 + … + p_n = 1$

Exemple (voir **a.**) **:** La fonction de répartition de X est :

Valeurs de X	0	1	2
$P(X \leq x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	1

Remarque : La fonction de répartition est surtout utilisée dans le cas des **variables aléatoires continues**, pour lesquelles la loi de probabilité n'existe pas.

c. Caractéristiques d'une variable aléatoire discrète.

Soit X une variable aléatoire qui prend n valeurs x_1, x_2, … et x_n et p_1, p_2, … et p_n les probabilités associées.

Espérance mathématique : $$\boxed{E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i}$$

Remarque : L'espérance mathématique est parfois notée $\overline{X}$ et correspond à la valeur moyenne de X.

Variance : $$\boxed{VarX = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - E(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - (E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2}$$ parfois notée **V(X)**

Ecart-type : $$\boxed{\sigma(X) = \sqrt{VarX}}$$